# OSTWALD'S KLASSIKER

DER

# EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. Gebunden.



Nr. 1.

» 2.

» 7.

» 10.

» 11.

» 12.



» 13.

» 20.

» 21.

» 23.

» 24.

» 25.

» 31.

(135 S.) ℳ 2.—.

Nr. 32. **Lambert's** Photometrie. Zweites Heft: Theil III, IV und V. Mit 32 Figuren im Text. (112 S.) ℳ 1.60.

» 33. —— —— Drittes Heft: Theil VI und VII. — Anmerkungen. Mit 8 Figuren im Text. (172 S.) ℳ 2.50.

» 36. **F. Neumann,** Über ein allgemein. Princip der mathemat. Theorie inducirter elektr. Ströme. (1847.) Herausg. von C. Neumann. Mit 10 Fig. im Text. (96 S.) ℳ 1.50.

» 37. **S. Carnot,** Betrachtungen üb. d. bewegende Kraft d. Feuers und die zur Entwickelung dieser Kraft geeigneten Maschinen. (1824.) Übersetzt und herausgegeben von W. Ostwald. Mit 5 Figuren im Text. (72 S.) ℳ 1.20.

» 40. **A. L. Lavoisier** u. **P. S. de Laplace,** Zwei Abhandlungen über die Wärme. (Aus den Jahren 1780 u. 1784.) Herausg. v. J. Rosenthal. Mit 13 Figuren im Text. (74 S.) ℳ 1.20.

» 44. Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandlungen von **Gay-Lussac, Dalton, Dulong** u. **Petit, Rudberg, Magnus, Regnault.** (1802-1842.) Herausg. von W. Ostwald. Mit 33 Textfiguren. (213 S.) ℳ 3.—.

» 52. **Aloisius Galvani,** Abhandlung üb. d. Kräfte der Electricität bei der Muskelbewegung. (1791.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 21 Fig. auf 4 Taf. (76 S.) ℳ 1.40.

» 53. **C. F. Gauss,** Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt. In der Sitzung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 15. December 1832 vorgelesen. Herausgegeben von E. Dorn. (62 S.) ℳ 1.—.

» 54. **J. H. Lambert,** Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausgegeben von A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) ℳ 1.60.

» 55. **Lagrange** u. **Gauss,** Abhandlungen über Kartenprojection. (1779 u. 1822.) Herausgeg. v. A. Wangerin. Mit 2 Textfig. (102 S.) ℳ 1.60.

» 56. **Ch. Blagden,** Die Gesetze der Überkaltung und Gefrierpunktserniedrigung. 2 Abhandlungen. (1788.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. (49 S.) ℳ —.80.

» 57. **Fahrenheit, Réaumur, Celsius,** Abhandlungen über Thermometrie. (1724, 1730—1733, 1742.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 17 Fig. im Text. (140 S.) ℳ 2.40.

» 59. **Otto von Guericke's** neue »Magdeburgische« Versuche über den leeren Raum. (1672.) Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Friedrich Dannemann. Mit 15 Textfiguren. (116 S.) ℳ 2.—.

» 61. **G. Green,** Ein Versuch, die mathematische Analysis auf die Theorieen der Elektricität und des Magnetismus anzuwenden. (Veröffentlicht 1828 in Nottingham.) Herausgegeben von A. v. Oettingen und A. Wangerin. (140 S.) ℳ 1.80.

» 63. **Hans Christian Oersted** und **Thomas Johann Seebeck,** Zur Entdeckung des Elektromagnetismus. (1820—1821.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 30 Textfiguren. (83 S.) ℳ 1.40.

» 69. **James Clerk Maxwell,** Über Faraday's Kraftlinien. (1855 u. 1856.) Herausgegeben von L. Boltzmann. (130 S.) ℳ 2.—.

» 70. **Th. J. Seebeck,** Magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz. (1822—1823.) Herausgegeben von A. J. von Oettingen. Mit 33 Textfiguren. (120 S.) ℳ 2.—.

van Zeylichem

# Christian Huygens'

nachgelassene Abhandlungen:

## Über die Bewegung der Körper durch den Stoss

## Über die Centrifugalkraft

Herausgegeben

von

**Felix Hausdorff**

**Mit 49 Figuren im Text.**

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1903

# Ueber die Bewegung der Körper durch den Stoss.[1]

Von

**Christian Huygens.**

---

### Voraussetzung I.

Ein einmal bewegter Körper setzt, wenn ihm nichts entgegensteht, seine Bewegung beharrlich mit derselben Geschwindigkeit und in gerader Linie fort.

### Voraussetzung II.[2]

Was auch immer die Ursache des Zurückprallens harter Körper von der gegenseitigen Berührung sei, wenn sie einander stossen, wir stellen den Satz auf: wenn zwei gleiche Körper mit gleichen Geschwindigkeiten, aus entgegengesetzten Richtungen und direct sich treffen, so prallt jeder von beiden mit derselben Geschwindigkeit zurück, mit welcher er kam.

Ihre Begegnung wird eine directe genannt, wenn auf derselben Geraden, welche die Schwerpunkte beider verbindet, sowohl Bewegung als Berührung stattfindet.

### Voraussetzung III.[3]

Die Bewegung der Körper, Gleichheit oder Ungleichheit der Geschwindigkeiten, muss man relativ auffassen, in Hinsicht auf andere Körper, welche als ruhend betrachtet werden, wenn auch vielleicht diese wie jene in einer anderen, gemeinsamen Bewegung begriffen sind. [370] Wenn daher zwei Körper sich stossen, so ertheilen sie einander, auch wenn sie ausserdem beide gleichzeitig einer weiteren gleichförmigen Bewegung unterworfen sind, keinen anderen Antrieb, in

Ansehung dessen, welcher diese gemeinsame Bewegung mitmacht, als ob jene für alle hinzukommende Bewegung nicht vorhanden wäre.

So z. B. sagen wir, wenn ein Insasse eines mit gleichförmiger Geschwindigkeit fahrenden Schiffes zwei gleiche Kugeln mit gleicher Geschwindigkeit auf einander stossen lässt, nämlich in Ansehung seiner und der Schiffstheile, — dass beide auch mit gleicher Geschwindigkeit zurückprallen müssen in Ansehung eben dieses Insassen, genau so als wenn er auf dem Schiffe ausser Fahrt oder am Lande stehend dieselben Kugeln mit gleicher Geschwindigkeit zusammenstossen liesse.

Nachdem wir dies beim Stoss gleicher Körper zu Grunde gelegt haben, werden wir die Gesetze ihrer gegenseitigen Beeinflussung ableiten, jedoch weitere Voraussetzungen, deren wir im Falle ungleicher Körper bedürfen werden, am rechten Orte einfügen.

## Lehrsatz I.[4])

*Wenn auf einen ruhenden Körper ein anderer gleicher Körper stösst, so wird dieser nach der Berührung ruhen, für den ruhenden aber wird dieselbe Geschwindigkeit gewonnen werden, welche der stossende besass.*




Man stelle sich vor, dass ein Boot am Ufer flussabwärts treibe, und zwar so nahe dem Ufer, dass ein auf jenem stehender Passagier einem am Lande stehenden Gefährten die Hände reichen kann. Nun möge der Fahrende mit seinen Händen,

*A* und *B*, zwei gleiche, an Fäden aufgehängte Körper *E* und *F* halten, deren Abstand *EF* im Punkte *G* halbirt sei: durch gleiche Gegenbewegung der Hände zum Zusammenstoss in Ansehung seiner und des Kahns wird er auch die Kügelchen *E* und *F* mit gleicher Geschwindigkeit zusammenstossen lassen, die daher nothwendig auch mit gleicher [**371**] Geschwindigkeit (Voraussetzung II) von der gegenseitigen Berührung zurückprallen (mit Bezug auf den Fahrenden und das Schiffchen); das Schiffchen aber denke man sich inzwischen nach der linken Seite getrieben mit der Geschwindigkeit *GE*, also mit derselben, mit welcher die Hand *A* nach rechts gezogen wurde.

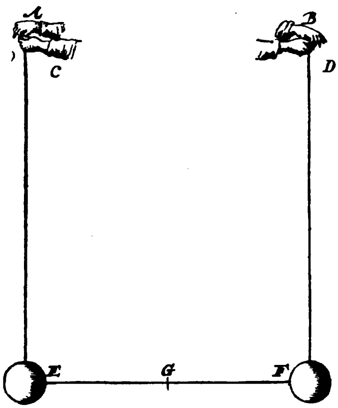


Fig. 1.

Es ist also offenbar, dass die Hand *A* des Passagiers unbewegt stand für das Ufer und den Gefährten darauf; dass aber die Hand *B*, vom Standpunkte dieses Gefährten aus, mit der Geschwindigkeit *FE* bewegt worden ist, welche das Doppelte von *GE* oder *FG* beträgt. Wenn man sich demnach vorstellt, dass der Gefährte am Ufer mit seiner Hand *C* die Hand *A* des Fahrenden ergriffen hat und damit das Ende des die Kugel *E* haltenden Fadens, mit der anderen Hand *D* aber die Hand *B* des Fahrenden, welche den Faden trägt, an dem *F* hängt, so erhellt, dass, während der Passagier die Kugeln *E* und *F* mit gleicher Geschwindigkeit zusammenlaufen lässt (hinsichtlich seiner und des Schiffes), zugleich der Gefährte am Lande auf die ruhende Kugel *E* die mit der Geschwindigkeit *FE* bewegte Kugel *F* gestossen hat (hinsichtlich des Ufers und seiner selbst). Natürlich macht es für den Fahrenden, der seine Kugeln in besagter Weise bewegt, nichts aus, dass der Gefährte am Lande seine Hände und die Fadenenden erfasst hat, da er deren Bewegung nur mitmacht und ihr keine Störung bereitet (siehe Figur 1). Aus demselben Grunde hindert es auch den Gefährten am Lande, der die Kugel *F* gegen die unbewegte *E* heranführt, durchaus nicht, dass der Passagier mit ihm die Hände verschlungen hält, wenn

die Hände $A$ und $C$ beide bezüglich des Uferrandes und des Gefährten ruhen, die beiden $D$ und $B$ aber mit derselben Geschwindigkeit $FE$ bewegt werden. Weil aber, wie gesagt, die Kugeln $E$ und $F$ nach der wechselseitigen Berührung mit gleicher Geschwindigkeit zurückprallen, für den Passagier nämlich und das Boot, und zwar die Kugel $E$ mit der Geschwindigkeit $GE$, und die Kugel $F$ mit der Geschwindigkeit $GF$, und weil inzwischen das Boot nach links mit der Geschwindigkeit $GE$ oder $FG$ weiterfährt, so folgt, hinsichtlich des Ufers und des Gefährten darauf, dass die Kugel $F$ nach dem Stoss unbewegt bleibt, aber die andere $E$, vom selben Gesichtspunkte aus, nach links läuft mit der doppelten Geschwindigkeit von $GE$, das heisst [**372**] mit der Geschwindigkeit $FE$, mit der gleichen, mit welcher er die Kugel $F$ nach $E$ trieb. Daher haben wir, hinsichtlich des am Lande Stehenden, der auf einen unbewegten Körper einen gleichen stossen lässt, bewiesen, dass dieser (Körper) seine ganze Bewegung nach der Berührung verliert, für jenen aber die ganze gewonnen wird. Was zu beweisen war.

## Lehrsatz II.[5])

*Wenn zwei gleiche, mit ungleichen Geschwindigkeiten bewegte Körper zusammenstossen, so werden sie sich nach dem Stosse mit vertauschten Geschwindigkeiten bewegen.*

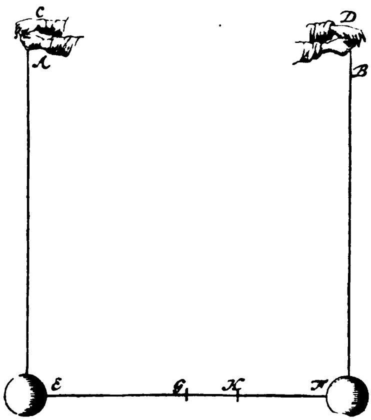


Fig. 2.

Der Körper $E$ (siehe Figur 2) möge mit der Geschwindigkeit $EH$ nach rechts bewegt werden, der ihm gleiche Körper $F$ aber möge mit der kleineren Geschwindigkeit $FH$ aus entgegengesetzter Richtung auf ersteren loseilen; sie werden sich also in $H$ begegnen. Ich behaupte, nach dem Zusammenstoss wird sich der Körper $E$ mit der Geschwindigkeit $FH$ nach links, $F$ aber mit der Geschwindigkeit $EH$ nach rechts bewegen.

Man stelle sich nämlich einen Mann am Ufer eines Flusses vor, der die besagten Bewegungen der Körper bewirkt; indem

er mit seinen Händen $C$ und $D$ die Enden der Fäden hält, woran jene (Körper) hängen, und indem er mit den erwähnten Geschwindigkeiten $EH$ und $FH$ seine Hände, also zugleich die Körper $E$ und $F$ einander annähert. Die Entfernung $EF$ sei sodann in $G$ halbiert; und man denke sich ein Boot mit der Geschwindigkeit $GH$ nach rechts fahrend, worauf ein anderer Mann stehen möge, auf welchen bezogen die Kugel $E$ nur mit der Geschwindigkeit $EG$, dagegen die Kugel $F$ mit der Geschwindigkeit $FG$ sich bewegen wird, so dass, hinsichtlich seiner, die beiden Kugeln mit gleicher Geschwindigkeit zum Zusammenstoss getrieben werden. Wenn man daher annimmt, er habe mit seinen Händen $A$ und $B$ die Hände $C$ und $D$

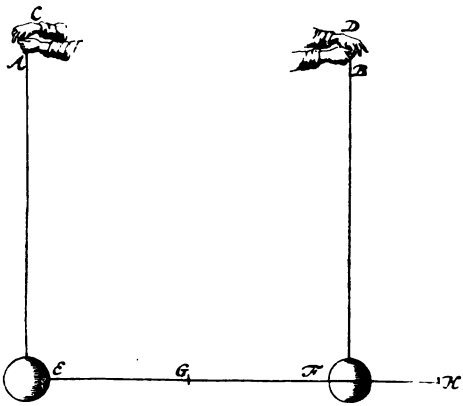


Fig. 3.

des Gefährten am Lande erfasst und damit die Enden der Fäden, an denen die Kugeln hängen, so stellt sich heraus, dass der Mann am Ufer die Kugeln mit den Geschwindigkeiten $EH$, $FH$ zusammentreibt, zugleich aber der Passagier im Kahne [373] sie mit gleichen Geschwindigkeiten $EG$, $FG$ gegeneinander laufen lässt; folglich werden von des letzteren Standpunkt (Voraussetzung II.) beide mit gleicher Geschwindigkeit von der Berührung zurücklaufen; nämlich $E$ mit der Geschwindigkeit $GE$, und $F$ mit der Geschwindigkeit $GF$ Inzwischen fährt das Schiffchen mit der Geschwindigkeit $GH$ weiter. Daher wird mit Bezug auf das Ufer und den Mann darauf $F$ die aus $GF$ und $GH$ zusammengesetzte Geschwindigkeit $EH$ haben, $E$ aber die Geschwindigkeit $FH$, nämlich

die Differenz von *GE* und *GH*. Und so folgt, bezüglich des Mannes am Ufer, der die Kugeln *E* und *F* mit den Geschwindigkeiten *EH* und *FH* gegen einander stösst, dass nach dem Stoss *E* mit der Geschwindigkeit *FH*, *F* aber mit der Geschwindigkeit *EH* zurücklaufen wird; w. z. b. w.

Wenn sich hingegen beide Körper *E* und *F* nach rechts bewegen, und zwar *E* mit der Geschwindigkeit *EH*, *F* aber mit der geringeren Geschwindigkeit *FH* voraneilend (s. Fig. 3), so wird *E* den Körper *F* einholen, und sie werden sich in *H* treffen. Ich behaupte nun, dass nach dem Stoss *F* mit der Geschwindigkeit *EH* weiterlaufen, *E* dagegen mit der Geschwindigkeit *FH* folgen wird. Der Beweis wird wie der obige geführt.

## Voraussetzung IV.

Wenn ein grösserer Körper gegen einen kleineren, ruhenden läuft, so erteilt er ihm eine gewisse Bewegung und verliert demnach etwas von seiner eigenen.

## Lehrsatz III.

*Ein beliebig grosser Körper wird von einem beliebig kleinen bei jeder Geschwindigkeit in Bewegung versetzt.*

Man denke sich (Fig. 4) nahe dem Ufer eines Flusses ein Boot fahrend, in welchem ein Mann steht und die an Fäden aufgehängten Körper *A* und *B* trägt; *A*, welchen er mit der Linken [links vom Beschauer!] hält, sei der grössere, *B* der [**374**] kleinere Körper; und er möge die Hand *D*, welche den Körper *B* trägt, unbewegt, hinsichtlich seiner und des Schiffes, halten; gegen diese Hand möge er nun die Hand *C* und mit ihr den Körper *A* bewegen, mit der beliebigen Geschwindigkeit *AB*. Nach der Voraussetzung IV wird also *B* einen Bewegungsantrieb empfangen, der Körper *A* wird etwas von seiner Geschwindigkeit einbüssen und so mit einer geringeren Geschwindigkeit als *AB* nach rechts weiter eilen. Inzwischen

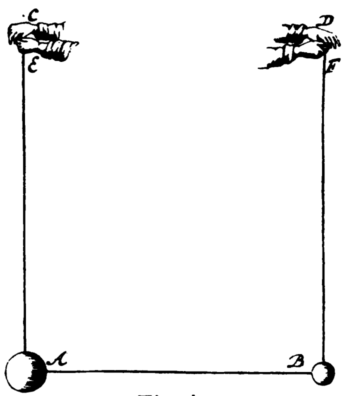



Fig. 4.

denke man sich das Schiffchen mit der Geschwindigkeit $BA$ nach links fahrend. Daraus ergiebt sich, dass der Körper $A$, während der Passagier ihn mit der Geschwindigkeit $AB$ hinüberzieht — in Hinsicht auf sich und das ihn weiterführende Schiff — nun in Ansehung des Ufers und eines daraufstehenden Zuschauers ruht; dasselbe gilt von der Hand $C$. Die andere Hand $D$ wird hingegen mit dem Körper $B$ sich bewegen, vom Standpunkte des Zuschauers aus, und zwar nach links mit der Geschwindigkeit $BA$, da wir sie ja hinsichtlich des Bootes unbewegt sein liessen, und da das Boot mit der Geschwindigkeit $BA$ nach links fährt. Wenn man daher annimmt, der Zuschauer am Ufer habe mit seinen Händen $E$ und $F$ die Hände $C$ und $D$ des Passagiers ergriffen, so erhellt, dass, während der Passagier die Kugel $A$ gegen die für ihn unbewegliche $B$ treibt, der Zuschauer zugleich $B$ gegen $A$ treibt, welche ($A$) vom Standpunkt des Zuschauers und des Ufers ruht. Wir sagten aber, dass nach dem Stosse die Kugel $A$, bezogen auf Passagier und Kahn, nach rechts mit geringerer Geschwindigkeit als $AB$ weiterlaufe; nun fährt das Schiffchen mit der Geschwindigkeit $BA$ nach links, also ist hinsichtlich des Ufers und des Zuschauers darauf offenbar, dass sich $A$ nach dem Stosse etwas nach links bewegt. Bezogen auf den am Lande Stehenden, welcher auf den ruhenden, beliebig grossen Körper $A$ einen beliebig kleinen Körper $B$ mit der beliebigen Geschwindigkeit $BA$ stösst, geräth folglich der grössere Körper $A$ in Bewegung, w. z. b. w.

## Voraussetzung V.[6])

Wenn es sich nach dem Stosse zweier einander entgegenlaufender harter Körper herausstellt, dass der eine von ihnen [**375**] alle Bewegung, welche er besass, bewahrt, so verliert oder gewinnt auch der andere nichts an Bewegung.

## Lehrsatz IV.[7])

*So oft zwei Körper zusammenstossen, ist ihre relative Geschwindigkeit beim Auseinanderlaufen so gross wie bei der Annäherung.*

In Betreff gleicher Körper ist dies offenbar, nach dem zweiten Lehrsatze. Nun seien sie also ungleich, und zunächst werde der Fall angenommen, dass auf einen grösseren ruhenden $A$

ein kleinerer Körper $B$ getrieben wird, welcher sich mit der Geschwindigkeit $BA$ nach rechts bewegt (siehe Figur 5).



Fig. 5.

Ich behaupte, dass sie sich nach der Berührung mit derselben Geschwindigkeit $BA$ von einander trennen werden, so dass, wenn der Körper $B$ in einem Zeitteil die Strecke $BA$ zurückgelegt hat, nach einem zweiten gleichen Zeitteil beide Körper wiederum durch eine Strecke gleich $BA$ getrennt gefunden werden.

Es steht nämlich fest, dass $A$ irgend eine Geschwindigkeit, etwa $AC$, durch den Stoss des Körpers $B$ empfängt. Diese muss kleiner sein als die Geschwindigkeit $BA$, mit welcher $B$ selbst bewegt wurde: denn wenn $B$ und $A$ gleich wären, dann erst würde $A$ (nach Lehrsatz I) die Geschwindigkeit $BA$ durch den Stoss empfangen. $AC$ möge im Punkte $D$ halbiert sein, und es sei $AE$ gleich $AD$. Wenn wir uns also diese Bewegungen auf einem Schiffchen vorgehend denken, welches mit der Geschwindigkeit $DA$ nach links fährt, so muss vor dem Stoss der Körper $A$, welcher auf dem Kahn ruhte, sich vom Standpunkt des Ufers mit der besagten Geschwindigkeit $DA$, und zwar nach links bewegt haben; nach dem Stoss aber wird $A$ — da er auf dem Schiffchen mit der Geschwindigkeit $AC$ nach rechts bewegt sein soll, das Schiffchen selbst aber in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit $DA$ fährt — sich vom Standpunkte des Ufers aus und zwar mit der Geschwindigkeit $DC$ oder $AD$ nach rechts bewegen. Also bewahrt der Körper $A$ vor und nach dem Stoss hinsichtlich des Ufers [376] dieselbe Geschwindigkeit. Nothwendigerweise hat daher auch — in nämlicher Lagenbeziehung — $B$ nichts von seiner Geschwindigkeit verloren (Voraussetzung V). $B$ bewegte sich aber bezüglich des Ufers vor dem Zusammenstoss mit der Geschwindigkeit $BE$ nach rechts, weil er im Schiffchen die Geschwindigkeit $BA$ nach rechts besass, das Schiffchen aber die Geschwindigkeit $DA$ oder $AE$ in entgegengesetzter Richtung. Also wird er auch nach dem Stosse, hinsichtlich des Ufers, mit der Geschwindigkeit $BE$, aber nach links, sich bewegen müssen: denn an einer Bewegung nach rechts hindert

ihn die langsamerere Bewegung des Körpers $A$. Da sich also nach dem Stoss hinsichtlich des Ufers $B$ mit der Geschwindigkeit $EB$ nach links bewegt, dagegen $A$ nach rechts mit der Geschwindigkeit $AD$ oder $EA$, so müssen sich beide von einander entfernen mit der aus $BE$ und $EA$ zusammengesetzten Geschwindigkeit, d. h. mit der Geschwindigkeit $BA$, und dies nicht nur vom Standpunkte des Ufers, sondern auch vom Kahn aus, da sie ($B$ und $A$) in Wahrheit mit dieser Geschwindigkeit von einander abprallen. Was aber auf dem fahrenden Schiffchen für einander stossende Körper gilt, das muss auch ausserhalb des Schiffchens überall in derselben Weise gelten.

Nach dem Beweise für diesen Fall folgen die übrigen leicht; es bleiben nun noch vier verschiedene Möglichkeiten; entweder ruht nämlich der kleinere Körper, oder beide werden mit entgegengesetzt gerichteten Bewegungen zusammengetrieben, oder der kleinere Körper folgt mit schnellerer Bewegung dem grösseren, oder umgekehrt. Alle diese Fälle kann man auf einmal vornehmen.

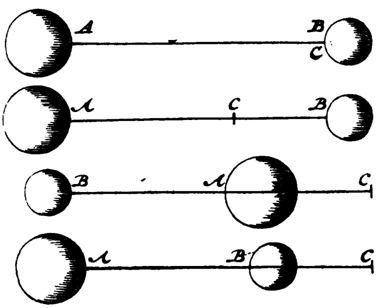



Fig. 6.

Der Körper $A$ sei nämlich wie vorhin grösser als $B$ (siehe Fig. 6), und bewege sich mit der Geschwindigkeit $AC$, $B$ aber ruhe entweder gänzlich oder besitze die Geschwindigkeit $BC$; wenn also die derartig bewegten Körper, aufeinanderbezogen, die Geschwindigkeit $AB$ haben, dann sage ich, dass sie sich nach dem Stoss mit derselben Geschwindigkeit trennen werden. Denn wenn man wiederum annimmt, diese Bewegungen fänden auf einem Schiffchen statt, welches mit der Geschwindigkeit $CA$, also derselben, mit welcher der Körper $A$ bewegt wird, aber in entgegengesetzter Richtung, fährt, so ist es für den Uferstandpunkt offenbar, dass $A$ unbewegt steht, und $B$ auf jeden Fall mit der Geschwindigkeit $BA$ dagegen läuft. $A$ ist grösser als $B$; also ergiebt sich der frühere Fall [**377**], aus dem hervorgeht, dass sich die Körper hinsichtlich des Ufers nach dem Stoss mit derselben Geschwindigkeit $AB$ trennen müssen. Dadurch

ist es auch klar, dass sie hinsichtlich des Schiffes und in Wahrheit mit dieser Geschwindigkeit von einander zurückprallen.

## Lehrsatz V.[8])

*Wenn von zwei Körpern jeder mit derselben Geschwindigkeit, mit welcher er vom Zusammenstoss mit dem anderen zurückprallte, zum nochmaligen Zusammenstoss umkehrt, so wird jeder nach dem zweiten Stoss dieselbe Geschwindigkeit erwerben, mit welcher er sich zum ersten bewegte.*

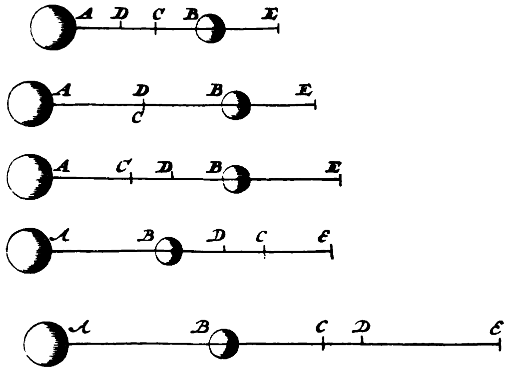



Fig. 7.

Angenommen werde: der Körper $A$ habe sich mit der Geschwindigkeit $AC$ bewegt, und $B$ mit der Geschwindigkeit $BC$, und so seien sie sich begegnet; vom Stoss sei $A$ mit der Geschwindigkeit $CD$, $B$ mit der Geschwindigkeit $CE$ zurückgewichen (siehe Fig. 7), hernach aber seien sie beide zum Zusammenstoss mit den letztgenannten Geschwindigkeiten zurückgekehrt, also $A$ mit der Geschwindigkeit $DC$ und $B$ mit $EC$. Ich behaupte nun, $A$ werde von da mit der Geschwindigkeit $CA$ zurückkehren; $B$ aber mit der Geschwindigkeit $CB$, wie sie zuerst gegen einander gelaufen waren. Stellen wir uns nun vor, auf einem Schiffchen, welches mit der Geschwindigkeit $AD$ vorüberfährt, hätten diese Bewegungen statt, so wird, während sich $A$ mit der Geschwindigkeit $DC$ und $B$ mit der Geschwindigkeit $EC$ zum zweiten Stoss einander nähern, vom Ufer aus gesehen $A$ mit der Geschwindigkeit $AC$ (weil er auf dem Boote um $DC$ vorrückt, das Boot aber um $AD$)

laufen; $B$ jedoch bewegt sich in Ansehung des Ufers mit der Geschwindigkeit $BC$: denn weil $DE = AB$ (Lehrsatz IV), so wird nach Abzug der beiden gemeinsamen Strecke $DB$, $BE = AD$ sein; das Schiffchen wird also mit der Geschwindigkeit $BE$ bewegt, und $B$ auf demselben mit der Geschwindigkeit $EC$; daher wird sich, wie gesagt, $B$ für das Ufer mit der Geschwindigkeit $BC$ bewegen. Vom Standpunkt des Ufers aus muss also $A$ mit der Geschwindigkeit $CD$ und $B$ mit der Geschwindigkeit $CE$ vom Stoss zurückweichen, da von Anfang an vorausgesetzt war, wenn $A$ zum Stoss mit der Geschwindigkeit $AC$ strebe und $B$ mit $BC$, so würden sie nach dem [**378**] Stoss auseinander laufen, und zwar $A$ mit der Geschwindigkeit $CD$ und $B$ mit $CE$. Während sich also $A$, bezüglich des Ufers, mit der Geschwindigkeit $CD$ bewegt, das Schiffchen aber mit $AD$, wird $A$ an Bord die Geschwindigkeit $CA$ besitzen. Ebenso wird, da $B$ hinsichtlich des Ufers mit der Geschwindigkeit $CE$ bewegt wird und das Boot mit $AD$ oder $BE$, die Geschwindigkeit von $B$ an Bord $CB$ sein. Also die Körper, welche an Bord mit den Geschwindigkeiten $DC$ und $EC$ zum Stoss geführt wurden, kehren, wie bewiesen, mit den Geschwindigkeiten $CA$, $CB$ um; dies muss sich nun überall ergeben, und die Behauptung ist erwiesen.

## Lehrsatz VI.[9])

*Wenn zwei Körper zusammenstossen, so erhält sich nach dem Stoss keineswegs immer dieselbe Bewegungsgrösse, welche in beiden zusammen vor dem Stoss vorhanden war, sondern sie kann vermehrt oder vermindert sein.*

Die Bewegungsgrösse wird danach geschätzt, dass bei ungleichen, gleichschnell bewegten Körpern jeder um so mehr Bewegungsgrösse darstellt, je grösser er ist. Bei gleich grossen, ungleich schnell bewegten Körpern handelt sich's darum, um wieviel der eine schneller als der andere ist. Beweisen wir nun den ausgesprochenen Lehrsatz.




Fig. 8.

Es sei der Körper $A$ grösser als $B$; $A$ ruhe, und $B$ werde mit der Geschwindigkeit $BA$ gegen ihn bewegt. $A$ wird also

in Bewegung gerathen und (nach Lehrsatz III) eine gewisse Geschwindigkeit erwerben, etwa *AC*. Dagegen wird *B* mit der Geschwindigkeit *AD* zurückkehren, wobei die Gesammtgeschwindigkeit, die jeder, auf den anderen bezogen, haben wird, der Geschwindigkeit *AB* gleich sein muss (vergl. Lehrsatz IV). Wenn nun der Körper *A* dem *B* gleich wäre, so würde dieselbe Bewegungsgrösse nach wie vor dem Stoss vorhanden sein; denn offenbar ergiebt sich dieselbe (Bewegungsgrösse), ob sich nun zwei Körper, jeder gleich *B*, der eine mit der Geschwindigkeit *AD*, der andere mit der [**379**] Geschwindigkeit *AC* bewegen, oder ob *B* allein mit der Geschwindigkeit *CD* oder *BA* läuft.[10]) Da aber *A* grösser ist als *B*, so erhellt, dass eine grössere Bewegungsquantität da ist nach dem Stoss, wo *A* die Geschwindigkeit *AC* besitzt, und *B* die Geschwindigkeit *AD*, als vorher, wo nur *B* die Geschwindigkeit *BA* hatte. Umgekehrt wird die Möglichbkeit der Verminderung der Bewegungsgrösse so bewiesen: wenn beim Stoss von *B* mit der Geschwindigkeit *BA* gegen den ruhenden Körper *A*, dieser die Geschwindigkeit *AC* erhält, und in *B* die Geschwindigkeit *AD* verbleibt, so wird dagegen, wenn *A* mit der Geschwindigkeit *CA* und *B* mit der Geschwindigkeit *DA* aus entgegengesetzter Richtung zusammenkommen, der Erfolg sein, dass *A* nach dem Stoss unbewegt bleibt, und *B* mit der Geschwindigkeit *AB* (vergl. Lehrsatz V) zurückprallt; daher wird, gemäss dem, was oben bewiesen, nach dem Stoss eine geringere Bewegungsgrösse da sein, als vorher.

## Lehrsatz VII.

*Wenn ein grösserer Körper auf einen kleineren ruhenden stösst, so erteilt er ihm eine geringere Geschwindigkeit, als das Doppelte seiner eigenen.*

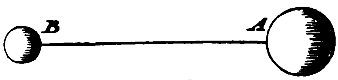



Fig. 9.

Der Körper *A* stosse mit der Geschwindigkeit *AB* den ruhenden kleineren *B*; Behauptung: *B* erhält eine geringere Geschwindigkeit, als das Doppelte von *AB* beträgt. Weil sich nämlich die Körper nach dem Stoss mit der Geschwindigkeit *AB* von einander entfernen müssen (vergl. Lehrsatz IV), so wäre es nothwendig, wenn die Geschwindigkeit des Körpers *B*

das Doppelte von $AB$ betrüge, dass $A$ nach dem Stoss mit der Geschwindigkeit $AB$ dem Körper $B$ folgte, was (nach Voraussetzung IV) unmöglich ist: im Falle aber, dass das Doppelte noch überschritten würde, wäre es nothwendig, dass $A$ nach dem Stoss mit einer $AB$ übertreffenden Geschwindigkeit fortliefe. Dies ist eine ähnliche Ungereimtheit; also ist die Behauptung richtig.

So ist hinsichtlich gleicher Körper im allgemeinen gezeigt, nach welchem Verhältnis jeder seine Bewegung auf den anderen überträgt, vorausgesetzt, dass gleiche mit gleichen Geschwindigkeiten [**380**] in gleicher Weise von einander zurückprallen. Ebenso können alle Fälle bei Körpern von ungleicher Grösse bestimmt werden; die meisten unter Voraussetzung des Folgenden.[11]) Ohne Zweifel wird jeder von zwei zusammenstossenden Körpern, deren Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältniss ihrer Massen stehen, mit derjenigen Geschwindigkeit zurückgetrieben werden, mit welcher er ankam.

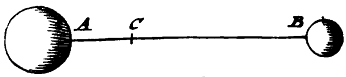


Fig. 10.

Wenn also $A$ die dreifache Masse von $B$ besitzt, die Geschwindigkeit von $B$ jedoch, $BC$, das Dreifache der Geschwindigkeit von $A$, $AC$, beträgt, so wird, nach dem Zusammenstoss in $C$, jeder Körper mit der Geschwindigkeit, mit welcher er vorher getrieben wurde, zurückkehren. Weil dies übrigens nicht ebenso handgreiflich zu fassen ist — zugegeben, dass es der Vernunft nicht widerstreitet und mit den Versuchen vortrefflich übereinstimmt — wie die Aufstellungen inbetreff gleicher Körper, so werden wir es durch einen Beweis zu bekräftigen unternehmen.

Für den naturgemäss beschleunigten Fall zweier schwerer Körper steht fest, dass sich ihre Fallräume wie die Quadrate ihrer Endgeschwindigkeiten verhalten. Dies ist von *Galilei* dargethan in der dritten »Unterredung« über die Bewegung und an zahllosen und ganz vorzüglichen Versuchen wahrgenommen; nicht minder auch dies, dass die beim Falle erworbene Endgeschwindigkeit den Körper wieder zu seiner ursprünglichen Höhe hinaufheben kann. Die Beweise für Beides werden in meiner Arbeit über die Pendeluhr beigebracht. Daraus wird aber das besagte Theorem nunmehr abgeleitet werden können. [**381**]

## Lehrsatz VIII.[12])

*Wenn aus entgegengesetzten Richtungen zwei Körper zusammenstossen, deren Massen im umgekehrten Verhältniss ihrer Geschwindigkeiten stehen, so prallt jeder von beiden mit derselben Geschwindigkeit zurück, mit welcher er kam.*

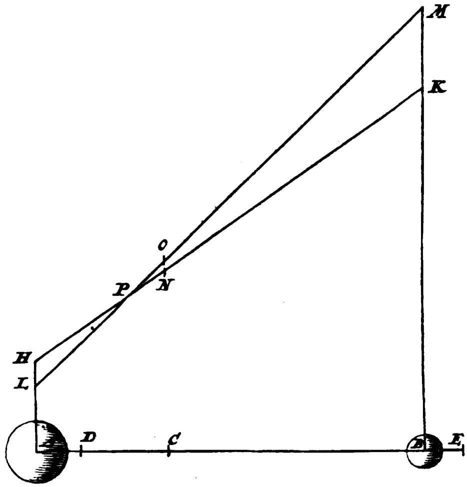



Fig. 11.

Es mögen zwei Körper, $A$ und $B$, zusammenstossen, von denen $A$ der grössere sei. Wie sich die Masse $A$ zur Masse $B$, so soll sich die Geschwindigkeit des Körpers $B$, welche gleich $BC$ ist, zur Geschwindigkeit des Körpers $A$, gleich $AC$, verhalten. Zu beweisen ist, dass nach der gegenseitigen Berührung jeder mit der Geschwindigkeit zurückprallt, mit welcher er kam, nämlich $A$ mit der Geschwindigkeit $CA$, $B$ aber mit der Geschwindigkeit $CB$. Ausgemacht ist jedoch, dass, wenn $A$ mit der Geschwindigkeit $CA$ zurückgeworfen wird, auch $B$ mit der Geschwindigkeit $CB$ zurückläuft, weil sie sonst, auf einander bezogen, nicht die gleiche Geschwindigkeit beim Auseinanderlaufen wie beim Zusammenlaufen hätten (Lehrsatz IV). Kehrt also der Körper $A$ nicht mit der Geschwindigkeit $CA$ zurück, so möge er zunächst, d. h. wenn es anginge, mit der kleineren Geschwindigkeit $CD$ zurückprallen; dann würde $B$ mit der Geschwindigkeit $CE$ zurückprallen, einer grösseren,

als die, mit welcher er kam, so dass $DE$ gleich $AB$ ist (Lehrsatz IV). Denken wir uns, der Körper $A$ habe seine frühere Geschwindigkeit $AC$, mit welcher er zum Stoss eilte, durch den Fall von der Höhe $HA$ gewonnen, natürlich so, dass sich die senkrechte Bewegung bei der Ankunft in $A$ in die horizontale, deren Geschwindigkeit $AC$ ist, umgewandelt, und dass analog $B$ die Geschwindigkeit $BC$ durch den Fall von der Höhe $KB$ erlangt habe. Es verhalten sich folglich diese Höhen wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten d. h. $(AC)^2 : (CB)^2 = HA : KB$. Wenn nun darauf, nach dem Stoss, die Körper $A$ und $B$ ihre durch $CD$, $CE$ gemessenen Horizontalbewegungen in senkrecht aufsteigende verwandeln, so folgt, dass $A$ zur Höhe $AL$ aufsteigt, so dass $AL : AH = CD^2 : CA^2$ ist [**382**]. Denn wenn $AL$ zu $AH$ ein derartiges Verhältnis hat, so ist gewiss, dass ein von der Höhe $LA$ fallender Körper die Geschwindigkeit $CD$ erhalten würde; daher wird umgekehrt der Körper mit der Geschwindigkeit $CD$ die Höhe $AL$ erreichen können, wie aus obigen Feststellungen folgt. Wenn dagegen der Körper $B$ seine Geschwindigkeit $CE$ in eine senkrechte Aufwärtsbewegung verwandelt, so wird er die Höhe $BM$ erreichen, so dass $MB : KB = CE^2 : CB^2$. Nun verbinde man $H$ mit $K$, $L$ mit $M$, durch gerade Linien, die sich nothwendig schneiden werden, sagen wir in $P$; man theile beide Linien in $N$ und in $O$ nach demselben Verhältniss, so dass wie die Masse $B$ zur Masse $A$, d. h. wie $AC$ zu $CB$, so $HN$ zu $NK$ und ebenfalls $LO$ zu $OM$ sich verhalten. Wenn daher der Schwerpunkt des Körpers $A$ in $H$ liegt und der Schwerpunkt von $B$ in $K$, so liegt ihr gemeinsamer Schwerpunkt in $N$. Nachdem sie aber von $H$ und $K$ herabgefallen sind und sich nach dem Zusammenstoss wieder nach oben bewegt haben, und zwar bis $L$ und $M$, wird ihr gemeinsamer Schwerpunkt in $O$ sein: dies ist ganz unmöglich, da, wie wir alsbald beweisen werden, der Punkt $O$ höher als $N$ liegt; es ist nämlich in der Mechanik ein Axiom von vollkommener Gewissheit, dass durch eine Bewegung von Körpern, welche von ihrer Schwere verursacht wird, ihr gemeinsamer Schwerpunkt nicht steigen kann. Dass aber der Punkt $O$ höher liegt als $N$, wird folgendermassen bewiesen. Nach Euklid lib. II prop. IV ist

$$EC^2 - BC^2 = 2CB \cdot BE + BE^2 = (EC + CB) \cdot BE$$

und ebenso

$$AC^2 - CD^2 = (AC + CD) \cdot AD.$$

Es ist aber $AD = BE$, weil $AB = DE$ ist, folglich $(EC^2 - CB^2):(AC^2 - CD^2) = (EC + CB):(AC + CD)$. [383 Da aber $EC + CB > 2CB$ und $AC + CD < 2AC$, so ist

$$(EC + CB):(AC + CD) > CB:CA$$

und auch

$$(EC^2 - CB^2):(AC^2 - CD^2) > BC:CA.$$

Weil aber $EC^2 : CB^2 = MB:BK$, so folgt (durch beiderseitige Subtraction von 1)

$$(EC^2 - CB^2):CB^2 = MK:KB.$$

Und da

$$CB^2 : CA^2 = KB:HA,$$

ferner

$$CA^2 : (CA^2 - CD^2) = HA:HL$$

(wegen

$$CA^2 : CD^2 = HA:AL),$$

so folgt schliesslich

$$(EC^2 - CB^2):(AC^2 - CD^2) = MK:HL$$

und demnach

$$MK:HL > BC:CA.$$

Es ist aber $MK:HL = MP:PL$, $BC:CA = MO:OL$, also $MP:PL > MO:OL$ und nach beiderseitiger Addition von 1 $ML:LP > ML:LO$. Daher ist $LO > LP$, woraus erhellt, dass der Punkt $O$ nach derjenigen Seite des Schnittpunktes $P$ fällt, welche nach $M$ hin liegt. Die Verbindungslinie der Punkte $O$ und $N$ ist nun parallel den Senkrechten $MB$ und $HA$, weil durch jene die Geraden $LM$ und $HK$ nach demselben Verhältniss getheilt werden. Also wie $M$ höher als $K$ liegt, ist offenbar $O$ höher als N. Hierfür war noch der Beweis zu liefern.

Zweitens werde, wenn es möglich ist, der Körper $A$ zurückgeworfen mit der Geschwindigkeit $CD$, die grösser ist als $CA$, mit welcher er zum Stoss heranlief (siehe Fig. 12). $CD$ wird aber kleiner sein als $CB$, also als die Geschwindigkeit, welche der Körper $B$ vor dem Stoss besass. Wenn nämlich $B$ nicht kleiner, sondern $A$ gleich wäre, dann erst würde $A$ nach dem Stoss [384] mit der Geschwindigkeit $CB$ zurückweichen (Lehrsatz II). Hingegen prallt $B$ nach dem Stoss zurück mit der Geschwindigkeit $CE$, so dass $DE$ gleich $AB$ ist (Lehrsatz IV). Die Sachlage im übrigen möge erwogen und die Construction durchgeführt werden wie im vorigen Falle. Demnach wird

sich ergeben, dass $L$ höher als $H$ liegt, da ja $DC$ grösser als $AC$ ist, und dass $M$ niedriger als $K$ liegt, da $EC$ kleiner als $CB$ ist. Darauf wird, wie oben, bewiesen, dass die Differenz $(DC^2 - CA^2)$ sich zur Differenz $(BC^2 - CE^2)$ verhält wie $(AC + CD)$ zu $(EC + CB)$. Da nun letztere Summe kleiner als $2\ CB$ ist, erstere Summe aber grösser als $2\ AC$, so muss

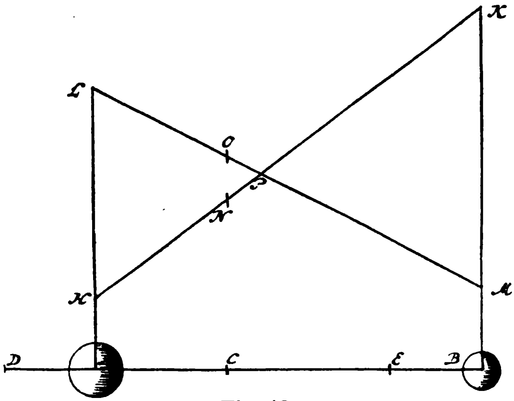


Fig. 12.

die Summe $(AC + CD)$ im Verhältniss zur Summe $(EC + CB)$ grösser sein als $AC$ zu $CB$. Also ist die Differenz $(DC^2 - CA^2)$ im Verhältniss zur Differenz $(BC^2 - CE^2)$ grösser als $AC$ zu $CB$. Es lässt sich nun wieder beweisen, dass sich die besagten Differenzen zu einander verhalten wie $LH$ zu $KM$. Also $LH$ ist im Verhältniss zu $KM$, und somit $LP$ zu $PM$ grösser als $AC$ zu $CB$ oder als $LO$ zu $OM$. Folglich fällt der Punkt $O$ nach derjenigen Seite des Schnittpunktes $P$, welche nach $L$ zu liegt. $ON$ ist, wie oben, parallel $LH$. Wie also $L$ höher als $H$ liegt, so ist $O$ höher als $N$, was aber nach dem im vorigen Falle erwähnten Grunde unmöglich ist.

Wenn man drittens behauptet, nach dem Stoss ruhe $A$, und nur $B$ pralle zurück, so geschieht dies mit der Geschwindigkeit $AB$ (Lehrsatz IV), da ja die Körper vor dem Stoss zu einander die Geschwindigkeit $AB$ hatten. Nehmen wir, ebenso wie oben, an, die Geschwindigkeit $BC$ sei für den Körper $B$ durch den Fall von der Höhe $KB$ erworben, so folgt, wenn sich $CB^2$ zu $AB^2$ verhält wie die Strecke $BK$ zu $BM$, dass $BM$ die Höhe ist, zu welcher sich der Körper $B$ erheben kann, wenn er seine

wagerechte Bewegung mit der Geschwindigkeit $AB$ in eine senkrecht nach oben gerichtete umwandelt (siehe Figur 13). [**385**] Da aber der Körper $A$ nach dem Stoss bewegungslos sein soll, so verbleibt er auf der Geraden $AB$. Zieht man daher die Verbindungslinie $MA$ und theilt sie in $O$, so dass sich $AO$ zu $OM$ wie $AC$ zu $CB$ verhält, so steigt der gemeinsame Schwerpunkt beider Körper bis zur Höhe des Punktes $O$. Als sich jedoch die Körper in $H$ und $K$, von wo sie herabgefallen

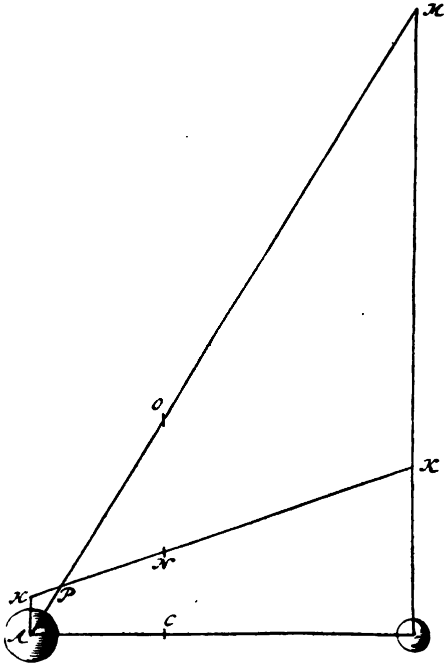


Fig. 13.

sein sollen, befanden, da lag ihr gemeinsamer Schwerpunkt in $N$, welcher gleichfalls die Gerade $HK$ im Verhältniss $AC$ zu $CB$ theilt. Zeigt man wiederum, dass sich der Punkt $O$ höher als $N$ befindet, so hat man wie oben eine indirekte Beweisführung geliefert. Dies zeigt man nun folgendermassen. Da $AB^2 : BC^2 = MB : BK$, so folgt durch Subtraction von 1 $(AB^2 - BC^2) : BC^2 = MK : KB$.

Ferner ist nach unseren Festsetzungen wie im ersten Falle

$$BC^2 : CA^2 = KB : HA,$$

also

$$(AB^2 - BC^2) : CA^2 = MK : HA,$$

und da der linke Quotient $> BC : CA$, so ist auch

$$MK : HA > BC : CA$$

oder

$$MP : PA > MO : OA,$$

also, nach Addition von 1, $MA : AP > MA : AO$, folglich $AP < AO$, woraus erhellt, dass $O$ auf diejenige Seite des Schnittpunktes $P$ fällt, die nach $M$ hin liegt. $M$ ist aber höher als $K$, und da $ON \parallel MK$, so liegt auch $O$ höher als $N$: wofür der Beweis noch zu erbringen war.




Fig. 14.

Wenn endlich gesagt werden sollte, der Körper $A$ fahre nach dem Stoss fort, sich in derselben Richtung zu bewegen mit der Geschwindigkeit $CF$, so wird diese nicht grösser sein als $AC$, mit welcher er vor dem Stoss lief: ferner muss der Körper $B$ ihm vorauseilen mit der Geschwindigkeit $CG$, welche die Geschwindigkeit $CF$ um $FG = AB$ (siehe Lehrsatz IV) übertrifft. Dass dies unmöglich ist, wird so festgestellt. Man [**386**] nehme $CD$ gleich $CF$, danach $DE$ gleich $AB$; dann wird $CE$ um ebenso viel kleiner als $ED$, um wieviel $CG$ grösser als dieselbe Strecke $ED$ oder $FG$ ist. Nun war aber, wenn wir wie beim ersten Falle den Körper $A$ mit der Geschwindigkeit $CD$ zurückprallen lassen, bewiesen worden, dass dem Körper $B$ nicht einmal die Geschwindigkeit $CE$ zukommen kann, da es auf einen Widerspruch führt, wenn nach Umwandlung der horizontalen Bewegungen in senkrechte der gemeinsame Schwerpunkt höher stiege als zuvor; das muss um so mehr gelten, wenn $B$ gar die Geschwindigkeit $CG$ erlangte, die $CE$ beträchtlich übertrifft, während $A$ die Geschwindigkeit $CF = CD$ hätte. Daher fährt auch der Körper $A$ nach dem Stoss nicht fort, sich nach derselben Seite zu bewegen. Es bleibt also nur noch übrig, dass er zurückgetrieben wird mit der Geschwindigkeit $CA$, mit welcher er vorher zum Zusammenstoss eilte: und demgemäss wird $B$ mit der Geschwindigkeit $CB$ zurückprallen. W. z. b. w.

## Lehrsatz IX.[13])

*Wenn zwei ungleiche, direkt auf einander prallende Körper, von denen entweder beide oder nur einer bewegt ist, und die Geschwindigkeiten beider, oder des einen, falls der andere ruht, gegeben sind, so soll man die Geschwindigkeiten beider nach dem Stoss finden.*

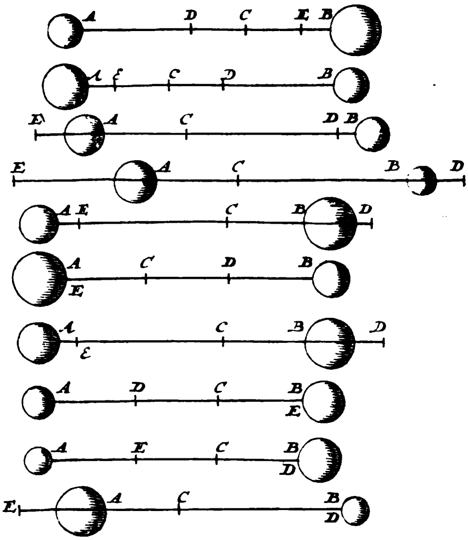


Fig. 15.

Der Körper $A$ möge sich nach rechts mit der Geschwindigkeit $AD$ bewegen, $B$ möge sich entweder in entgegengesetzter Richtung bewegen oder in gleicher Richtung voranlaufen mit der Geschwindigkeit $BD$, oder endlich er möge ruhen, so dass Punkt $D$ und $B$ zusammenfallen. Die relative Geschwindigkeit wird also $AB$ sein.

Man teile $AB$ in $C$, so dass sich $AC$ zu $CB$ verhält wie die Masse $B$ zu $A$; und man nehme $CD$ gleich $CE$. Ich behaupte, $EA$ werde [387] die Geschwindigkeit des Körpers $A$ nach dem Stoss sein und $EB$ diejenige des Körpers $B$ und zwar nach den Richtungen, welche die Reihenfolge der Punkte $EA$, $EB$ bezeichnet. Wenn der Punkt $E$ mit $A$ zusammenfällt, so wird der Körper $A$ zur Ruhe gebracht werden, wenn aber $E$ mit $B$ zusammenfällt, so wird der Körper $B$ still liegen.

Wenn wir die Richtigkeit davon auf einem mit gleichförmiger Geschwindigkeit fahrenden Schiffe gezeigt haben, so wird auch sicher sein, dass der Vorgang auf festem Lande sich ebenso abspielen wird. Man denke sich also ein Schiff dicht am Ufer eines Flusses entlang gezogen, auf welchem ein Passagier steht und mit seinen Händen *F* und *G* die an Fäden aufgehängten Kugeln *A* und *B* trägt; diese bewegt er mit den Geschwindigkeiten *AD* und *BD*, in Ansehung seiner und des Schiffes, und lässt sie im Punkte *D* zusammenstossen. Das Schiff, so setze man voraus, bewege sich indessen mit der Geschwindigkeit *DC* weiter fort in der Richtung, welche die Reihenfolge der Punkte *DC* angiebt. Es wird dabei herauskommen, dass sich die Kugel *A*, in Ansehung des Ufers und eines Beobachters darauf, nach rechts bewegt mit der Geschwindigkeit *AC*, weil sie in Ansehung des Schiffes die Geschwindigkeit *AD* besass. Weil dagegen die Kugel *B* auf dem Schiffe die Geschwindigkeit *BD* hat, so ist in Ansehung des Ufers ihre Geschwindigkeit *BC* (nach links). Wenn nun der Zuschauer am Lande mit seinen Händen *H* und *K* die Hände *F* und *G* des Passagiers ergreift und damit die Enden der Fäden, von denen *A* und *B* herabhängen, so erhellt, dass zugleich, während der Passagier, von seinem Standpunkte aus, jene Körper mit den Geschwindigkeiten *AD* und *BD* bewegt, der Mann am Ufer sie von seiner und des Ufers Lage aus mit den Geschwindigkeiten *AC* und *BC* treibt. Da diese Geschwindigkeiten im umgekehrten Verhältnis der Massen stehen, so prallen nothwendigerweise die Körper *A* und *B* in Ansehung jenes Beobachters mit denselben Geschwindigkeiten *CA* und *CB* zurück, wie im Vorhergehenden bewiesen ist. Das Schiff fährt aber immer weiter mit der Geschwindigkeit *DC* oder *CE* und zwar nach der Reihenfolge der Punkte *CE*. Nothwendigerweise bewegt sich dann *A*, in Ansehung des Schiffchens und des Insassen, mit der Geschwindigkeit *EA*, nach der durch die Reihenfolge der Punkte *E* und *A* bezeichneten Richtung, *B* aber, auch in Ansehung des [**388**] Schiffchens, mit der Geschwindigkeit *EB*, wieder nach der Reihenfolge der Punkte *EB*. Fällt aber *E* nach *A* oder *B*, so fährt offenbar Körper *A*, bezw. *B* nach dem Stoss mit gleicher Geschwindigkeit wie das Schiff selbst und nach derselben Richtung: daraus folgt nothwendig, dass die Körper in diesen Fällen in Ansehung des Schiffes und des Passagiers ruhen. Wir haben somit gezeigt, dass die Körper *A* und *B*, welche auf dem Schiffe gegen einander mit den Geschwindig-

keiten $AD$, $BD$ bewegt wurden, sich nach dem Stoss auf demselben Schiffe mit den Geschwindigkeiten $EA$, $EB$ bewegen, nach der Reihenfolge dieser Punkte. Was aber so auf dem Schiff statt hat, das ereignet sich, wie gesagt, sicherlich nicht anders am festen Lande. Also das Behauptete ist wahr. Zum Rechnungsgebrauch lassen sich nun aus der Construction dieser Aufgabe folgende Regeln bilden.

Sind $A$ und $B$ die beiden bewegten Körper und soll die Geschwindigkeit des Körpers $A$ nach dem Stoss gefunden werden, so verhalte sich die Summe beider Massen zur doppelten Masse $B$ wie die relative Geschwindigkeit beider Körper zu einer Hülfsgeschwindigkeit $C$. Der Unterschied zwischen dieser und der anfänglichen Geschwindigkeit von $A$ (oder in einem Falle die Summe beider, wenn nämlich $A$ von $B$ eingeholt wird) ergiebt die Geschwindigkeit, mit der sich $A$ nach dem Stoss bewegen wird, und zwar nach rückwärts, wenn der Ueberschuss auf Seite von $C$ war, vorwärts im entgegengesetzten Falle. Ist keine Differenz vorhanden, so wird der Körper $A$ nach dem Stoss ruhen.

Nach Auffindung der Geschwindigkeit des Körpers $A$ wird auch diejenige des Körpers $B$ bekannt, weil die wechselseitige Geschwindigkeit nach wie vor dem Stoss dieselbe bleiben muss.

Ist der Körper $A$ als ruhend gegeben und bewegt sich nur $B$ gegen ihn, so ist klar, dass die Geschwindigkeit von $A$ nach dem Stoss gleich der auf die besagte Weise gefundenen Geschwindigkeit $C$ ist. Hieraus wird auch folgendes Theorem abgeleitet [**389**].

## Lehrsatz X.[14]

*Die Geschwindigkeit, welche ein grösserer Körper einem ruhenden kleineren ertheilt, verhält sich zu derjenigen, welche der kleinere mit gleicher Geschwindigkeit dem ruhenden grösseren giebt, wie die Masse des grösseren zur Masse des kleineren.*

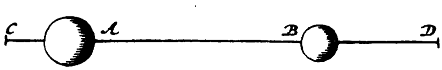



Fig. 16.

Der Körper $A$ sei grösser als $B$; nun nehmen wir an, der ruhende $A$ erhalte die Geschwindigkeit $AC$, wenn er von dem mit der Geschwindigkeit $BA$ sich bewegenden $B$ gestossen

wird, und $B$ empfange, wenn er in der Ruhelage von $A$ mit der gleichen Geschwindigkeit $AB$ gestossen wird, die Geschwindigkeit $BD$. Ich behaupte, dass sich die Geschwindigkeit $BD$ zu $AC$ verhält wie die Masse $A$ zur Masse $B$.

Denn weil sich die Geschwindigkeit $BD$ zu $2AB$ verhält wie der Körper $A$ zur Summe $(B + A)$ (Lehrsatz IX) und ebenso $(B + A)$ zu $B$ wie die Geschwindigkeit $2AB$ zur Geschwindigkeit $AC$ (Lehrsatz IX), so verhält sich die Geschwindigkeit $BD$ zur Geschwindigkeit $AC$ wie die Masse $A$ zu $B$. W. z. b. w.

## Lehrsatz XI.[15])

*Beim wechselseitigen Stoss zweier Körper wird die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten vor wie nach dem Stoss als die gleiche gefunden: wenn nämlich die Verhältnisse der Massen und Geschwindigkeiten durch Zahlen und Strecken ausgedrückt werden.*

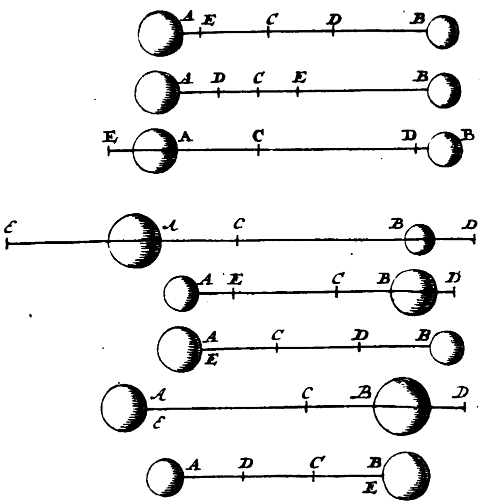



Fig. 17.

$A$ und $B$ seien die Körper, von denen $A$ vor dem Stoss mit der Geschwindigkeit $AD$, $B$ aber mit der Geschwindigkeit $BD$ bewegt werde. Nach dem Stosse sei $EA$ die (nach dem Vorhergehenden gefundene) Geschwindigkeit des Körpers $A$,

und $EB$ diejenige des Körpers $B$ [**390**]; man habe nämlich $AB$ in $C$ so geteilt, dass sich $BC$ zu $CA$ wie $A$ zu $B$ verhält, und $CE$ gleich $CD$ gemacht. Weil also das Verhältnis der Masse $A$ zu $B$ durch das Verhältnis der Strecke $CB$ zu $CA$ bezeichnet wird, so ist zu beweisen, dass

$$CB \cdot AD^2 + CA \cdot BD^2 = CB \cdot EA^2 + CA \cdot EB^2.$$

Wenn nun vier Grössen gegeben sind, von denen die erste um eben so viel die zweite, um wie viel die dritte die vierte überragt, oder von denen die erste um so viel von der zweiten, wie die dritte von der vierten überragt wird, so steht fest, dass die Summe aus der ersten und der vierten gleich der Summe aus der zweiten und der dritten ist. Daher ist unsere Behauptung richtig, wenn wir bewiesen haben, dass $AD^2 \cdot CB - EA^2 \cdot CB = EB^2 \cdot CA - BD^2 \cdot CA$ ist. Der Beweis wird nun so geführt (siehe Fig. 17):

Jedenfalls fällt entweder Punkt $C$ zwischen $A$ und $D$, oder $D$ zwischen $A$ und $C$. Wenn $C$ zwischen $A$ und $D$ liegt, so muss $AD$ gleich $(AC + CD)$ sein, $AE$ jedoch gleich deren Differenz; denn $CE$ ist gleich $CD$, so dass dann immer $AD$ grösser als $AE$ sein muss. In solchen Fällen ist nun $BE$ gleich $(BC + CE)$ und $BD$ gleich ihrer Differenz; und demnach muss $BE$ immer grösser als $BD$ sein. So oft dagegen $D$ zwischen $A$ und $C$ fällt, wird $AE$ gleich $AC + CE$ sein, $AD$ aber gleich ihrer Differenz; und demnach ist $AE$ grösser als $AD$. Aber auch $BD$ wird in diesen Fällen grösser als $BE$ sein, da ja jene Strecke gleich der Summe $(BC + CD)$ ist, diese aber deren Differenz. Folglich ist klar, dass, so oft $AD$ grösser als $AE$ ist, auch $BE$ grösser als $BD$ ist; so oft aber $AE$ grösser als $AD$ ist, ist auch $BD$ grösser als $BE$.

Ferner, da $DE$ in $C$ halbirt ist, [**391**] so ist, bei jeder beliebigen Lage des Punktes $A$, immer die Differenz der Quadrate $AD^2$ und $AE^2$ gleich dem vierfachen Rechteck $AC \cdot CD$ oder $AC \cdot CE$ (nach Euklids Elementen II, 8). Statt der beliebig getheilten Strecke hat man nämlich zu setzen: im 1. und 5. Falle (s. Fig. 17) die in $E$ getheilte Strecke $AC$; im 2. und 8. die in $D$ getheilte Strecke $AC$; im 3. und 4. die in $A$ getheilte Strecke $EC$; im 6. und 7., wo das Quadrat $AE$ verschwindet, tritt an Stelle der genannten Differenz $(AD^2 - AE^2)$ das Quadrat $AD$, das offenbar ebenfalls $= 4AC \cdot CD$ oder $4AC \cdot CE$ ist.

Aus demselben Grunde, wegen der Halbirung von $DE$ in $C$, ist stets, wie auch der Punkt $B$ liegen mag, die Differenz von $BE^2$ und $BD^2$ gleich dem Vierfachen des Rechtecks $BC \cdot CD$ oder $BC \cdot CE$. Es verhält sich aber, wegen der gemeinsamen Höhe, $4BC \cdot CD$ zu $4AC \cdot CD$, welches gleich der Differenz von $AD^2$ und $AE^2$ war, wie $BC$ zu $AC$. Also verhält sich $BE^2 - BD^2$ zu $AD^2 - AE^2$ wie $BC$ zu $AC$. Das Product aus der Differenz von $AD^2$ und $AE^2$ in die Strecke $BC$, was soviel heisst, als die Differenz der Producte $AD^2 \cdot BC$ und $AE^2 \cdot BC$, ist daher gleich dem Product aus der Differenz von $BE^2$ und $BD^2$ in die Strecke $AC$, das heisst gleich der Differenz der Producte von $BE^2 \cdot AC$ und $BD^2 \cdot AC$.

Immer aber, wenn $AD^2$ grösser oder kleiner als $AE^2$ ist, ist auch $BE^2$ zugleich grösser oder kleiner als $BD^2$. Also erhellt, dass das Product aus $AD^2$ in $BC$ immer nur um so viel grösser oder kleiner als $AE^2 \cdot BC$ ist, wie $BE^2 \cdot AC$ zugleich grösser oder kleiner ist als $BD^2 \cdot AC$. W. z. b. w. [**392**].

## Hilfssatz I.

*Die Gerade $AB$ sei in $C$ und $D$ so geteilt, dass der Abschnitt $AC$ kleiner ist als $CD$, und $CD$ kleiner als $BD$. Ich behaupte, das Rechteck $AD \cdot CB$ ist kleiner als das Doppelte der Summe der Rechtecke $AC \cdot CD + CD \cdot DB$.*

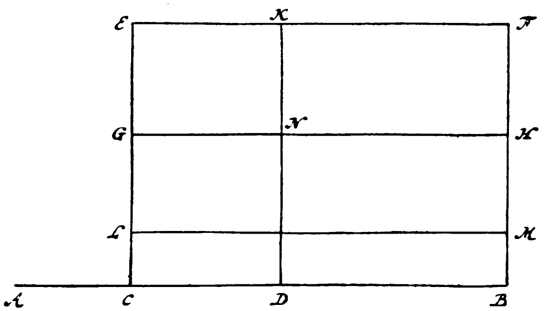



Fig. 18.

Man construire über dem Abschnitt $CD$ das Quadrat $CGND$, verlängere $CG$ bis $E$, so dass $GE$ gleich $CA$ ist, und vervollständige das Rechteck $ECBF$, ziehe endlich $DN$

bis $K$ und $GN$ bis $H$. Da $CG$ gleich $CD$ und $GE$ gleich $AC$ ist, so ist die ganze Strecke $CE$ gleich $AD$. Folglich ist das Rechteck $CF$ das, was unter dem Product $AD \cdot CB$ verstanden wird. Das Rechteck $EN$ ist gleich dem Rechteck $AC \cdot CD$, und das Rechteck $NB$ ist gleich dem Rechteck $CD \cdot DB$. Es ist daher zu beweisen, dass Rechteck $CF$ kleiner ist als das Doppelte der Summe der Rechtecke $EN$ und $NB$. Man nehme $GL$ gleich $GE$ und ziehe $LM$ parallel $AB$. Weil $GL$ kleiner als $GC$ ist (denn $GE$ oder $AC$ ist kleiner als $CD$), so fällt $LM$ zwischen $GH$ und $CB$.

Weil nun $CD$ kleiner als $DB$ ist, ist das Rechteck $LD$ kleiner als das Rechteck $DM$. Nun ist $LN$ gleich dem Rechteck $NE$, und das Rechteck $NM$ ist gleich dem Rechteck $NF$, und daher ist die Summe der Rechtecke $LN$ und $NF$ gleich $NE$ und $NM$. Wenn zu Gleichem Ungleiches hinzugefügt wird, nämlich zu den Rechtecken $LN$ und $NF$ das Rechteck $LD$ und zu den Rechtecken $NE$ und $NM$ das Rechteck $MD$, so muss die Summe jener, nämlich das Quadrat $CN$ vermehrt um $NF$ kleiner sein als die Summe dieser, also als das Rechteck $NB$ vermehrt um $NE$. Folglich ist offenbar die Summe aller dieser, d. h. Rechteck $CF$ kleiner als das Doppelte der Summe der Rechtecke $NB$ und $NE$. Was zu beweisen war [**393**].

## Hilfssatz II.

Die Strecken $AB$, $AC$ und $AD$ seien drei Proportionalen, deren grösste $AB$ ist, und zu allen werde dieselbe Länge $AE$ hinzugefügt. Ich behaupte, dass das Rechteck $BE \cdot DE$ grösser als das Quadrat $CE$ ist. Weil nämlich $AB$, $AC$ und $AD$




Fig. 19.

Proportionalen sind, so ist auch

$$BC : CD = BA : AC = CA : AD.$$

Nun ist

$$CA : AD > CE : ED,$$

also

$$BC : CD > CE : ED$$

oder durch Vertauschung der inneren Glieder

$$BC : CE > CD : ED$$

und durch beiderseitige Addition von 1

$$BE : EC > CE : ED,$$

oder $BE \cdot ED > CE^2$, wie behauptet war.

## Lehrsatz XII.[16])

*Wenn sich ein Körper gegen einen grösseren oder kleineren ruhenden bewegt, so wird er ihm eine grössere Geschwindigkeit ertheilen durch einen dazwischen geschalteten, ebenfalls ruhenden Körper von mittlerer Grösse, als wenn er jenen selbst unmittelbar berührte. Die grösste Geschwindigkeit wird er ihm aber dann ertheilen, wenn der zwischengeschaltete Körper die mittlere Proportionale zwischen den äusseren ist.*

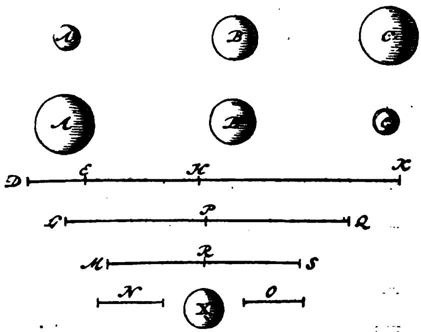


Fig. 20.

Der Körper $A$ möge sich gegen den ruhenden $C$ bewegen. Es sei (siehe Fig. 20) $A$ grösser oder kleiner als $C$, und zwischen beiden nehme man den unbewegten Körper $B$ von mittlerer Grösse an, so dass $A$ zuerst $B$, $B$ aber darauf $C$ antreibt. Ich behaupte nun, dass auf diese Weise für den Körper $C$ eine grössere Bewegung gewonnen wird, als wenn $A$ ihn unvermittelt gestossen hätte. Dasselbe Verhältniss, in welchem die Massen $A$, $B$ und $C$ zu einander stehen, mögen auch die Geraden $DE$, $EH$ und $HK$ haben; $LP$ sei die Geschwindigkeit des Körpers $A$ [**394**], die Verdoppelung derselben sei $LQ$. Wenn also die Summe $(DE + EH)$ sich zu $DE$ verhält wie $LQ$ zu $MR$, so ist $MR$ die für den ruhenden Körper $B$ beim Stoss von $A$ erzielte Geschwindigkeit (siehe Lehrsatz IX). $MS$ sei das Doppelte von $MR$. Wenn nun ferner die Summe $(EH + HK)$ sich zu $EH$ verhält wie $MS$ zu $N$,

so ist $N$ die Geschwindigkeit des Körpers $C$, nachdem er von $B$ mit der Geschwindigkeit $MR$ gestossen ist (siehe Lehrsatz IX). Verhält sich endlich wie die Summe $(DE + HK)$ zu $DE$ so $LQ$ zu $O$, dann ist $O$ die für den Körper $C$ gewonnene Geschwindigkeit, wenn er vom Körper $A$ mit der Geschwindigkeit $LP$ gestossen ist. Daher muss bewiesen werden, dass die Geschwindigkeit $N$ grösser als $O$ ist.

Es ist

$$LQ : N = (LQ : MR) \cdot (MR : N),$$
$$LQ : MR = HD : DE,$$
$$MR : N = KE : 2EH,$$

denn es war

$$KE : EH = SM : N,$$

also

$$KE : 2EH = SM : 2N = RM : N.$$

Folglich

$$LQ : N = (HD : DE) \cdot (KE : 2EH)$$
$$= HD \cdot KE : 2DE \cdot EH.$$

Ferner ist

$$LQ : O = (DE + HK) : DE$$
$$= (2DE \cdot EH + 2EH \cdot HK) : 2DE \cdot EH$$

Es ist aber

$$HD \cdot KE < 2DE \cdot EH + 2EH \cdot HK$$

nach Hülfsatz I, folglich, wenn wir durch $2DE \cdot EH$ dividiren und die gefundenen Werte beachten,

$$LQ : N < LQ : O,$$

also schliesslich $N > O$ [**395**].

Jetzt soll $B$ die mittlere Proportionale zwischen $A$ und $C$ sein. Ich behaupte, dass bei diesem Verhältniss die grösstmögliche Geschwindigkeit auf den Körper $C$ übertragen wird.

Nachdem an Stelle von $B$ zunächst der grössere Körper $X$ eingeschaltet ist, so dass $A$ den $X$, $X$ aber $C$ stösst, möge, wenn es statthaft ist, behauptet werden, der Körper $C$ empfange so eine grössere Geschwindigkeit, als wenn $B$ dazwischen geschaltet wäre. Wie $A$ zu $X$, so verhalte sich $DE$ zu $ET$ (siehe Fig. 21). Also ist $ET$ grösser als $EH$.

wenn nämlich wie vorhin $DE$, $EH$ und $HK$ Proportionalen sind, entsprechend dem Verhältniss der Körper $A$, $B$ und $C$. Es sei nun zu $TE$ und $HE$ die dritte Proportionale $VE$. Man finde danach, wie im Vorhergehenden, die für den Körper $C$ durch Zwischenschaltung von $B$ gewonnene Geschwindigkeit $N$. Entsprechend finde man die für denselben Körper $C$ durch Zwischenschaltung von $X$ gewonnene Geschwindigkeit $G$ (Lehrsatz IX). Wenn nämlich die Summe $A + X$ zu $A$, d. h. die Summe $(DE + ET)$ zu $DE$ sich verhält wie $LQ$ zu $JY$, so ist $JY$ die dem Körper $X$ durch den Stoss von $A$ eingeprägte Geschwindigkeit. Wenn sich ferner $X + C$ zu $X$, d. h. $ET + HK$ zu $ET$ verhält wie $2JY = ZY$ zu $G$, so wird $G$ die vom Körper $C$ erworbene Geschwindigkeit sein. Es ist also zu beweisen, dass $N$ grösser als $G$ ist.

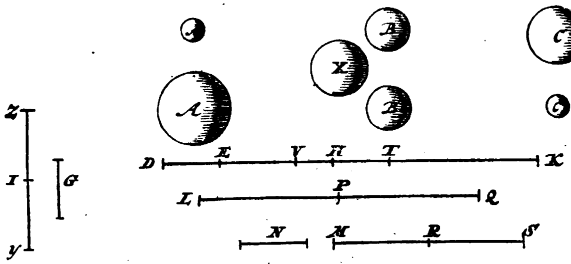



Fig. 21.

Wie früher ist

$$LQ : N = (HD : DE) \cdot (KE : 2HE).$$

Nun ist aber

$$KE : 2HE = HD : 2ED,$$

weil $KH$, $HE$, $ED$ Proportionalen sind; also wird jetzt

$$LQ : N = (HD : DE) \cdot (HD : 2DE) = HD^2 : 2DE^2.$$

Weiter ist

$$LQ : G = (LQ : JY) \cdot (JY : G)$$

und

$$LQ : JY = TD : DE,$$

$$JY : G = (KH + TE) : 2TE,$$

denn nach Construction ist

$$(KH + TE) : TE = ZY : G,$$

[396] also

$$(KH + TE) : 2TE = ZY : 2G = JY : G.$$

Also wird

$$LQ : G = [TD : DE] \cdot [(KH + TE) : 2TE].$$

Weil aber $DE$, $EH$, $HK$ Proportionalen sind, so ist

$$DE \cdot HK = EH^2.$$

Andererseits ist auch $EV \cdot ET = EH^2$, weil $EV$, $EH$, $ET$ Proportionalen sind. Also

$$DE \cdot HK = EV \cdot ET,$$

oder

$$VE : ED = HK : ET$$

und nach Addition von 1

$$VD : DE = (KH + TE) : TE,$$

$$VD : 2DE = (KH + TE) : 2TE.$$

Also

$$LQ : G = (TD : DE) \cdot (VD : 2DE)$$

$$= TD \cdot VD : 2DE^2,$$

während

$$LQ : N = HD^2 : 2DE^2$$

war. Da nun nach Hülfsatz II $TD \cdot VD > HD^2$, (denn $TE$, $HE$, $VE$ sind Proportionalen, und ihnen ist die Strecke $ED$ hinzugefügt), so folgt dass $LQ : G > LQ : N$ und mithin $N > G$, w. z. b. w.

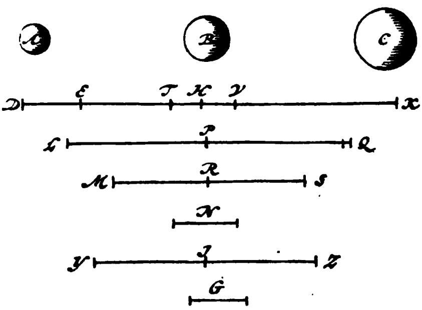


Fig. 22.

Man möge ferner behaupten, durch Zwischenschaltung eines Körpers $X$ von geringerer Grösse als $B$ empfange $C$ eine grössere Geschwindigkeit. Wieder verhalte sich $A$ zu $X$ wie $DE$ zu $ET$. Weil jetzt $X$ kleiner als $B$ angenommen wird, so ist auch $ET$ kleiner als $EH$, denn $DE$ verhält sich zu $EH$ wie $A$ zu $B$. Im übrigen wiederhole man dieselbe Construction und denselben Beweis, welcher soeben beigebracht ist, und durch

welchen wieder gezeigt wird, dass die Geschwindigkeit *N* grösser als *G* ist. Daher steht fest, dass der ruhende Körper *C* die grösste Geschwindigkeit durch Zwischenschaltung des *B* erhält, welcher die mittlere Proportionale zwischen *A* und *C* ist [**397**].

## Lehrsatz XIII.[17])

*Je mehr Körper zwischen zwei ungleiche, von denen der eine ruht, der andere sich bewegt, eingeschaltet werden, um so mehr Bewegung kann der ruhende empfangen. Am meisten wird jedoch durch irgend eine Zahl zwischengeschalteter Körper dann übertragen, wenn die Zwischenglieder mit den äussersten eine continuirliche Reihe von Proportionalen bilden.*

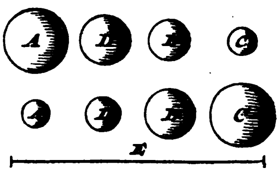


Fig. 23.

Die Körper *A*, *B* und *C* seien Proportionalen, von denen *A* sich bewegt, und die beiden übrigen ruhen; dann ist die grösstmögliche für den Körper *C* durch Zwischenschaltung eines Körpers zu gewinnende Bewegung diejenige, welche durch das Zwischenglied *B* erzeugt wird (Lehrsatz XII). Dass nun durch zwei Zwischenglieder eine noch grössere verursacht wird, geht aus Folgendem hervor. Wenn nämlich zwischen *A* und *B* die mittlerere Proportionale *D* geschaltet wird, so gewinnt der Körper *B* schon eine grössere Bewegung, als wenn er einfach vom Körper *A* gestossen wäre. Je grösser aber die Geschwindigkeit in *B* ist, um so mehr wird *C* mitgeteilt. Also wird *C* mehr bewegt durch Zwischenschaltung der Körper *D* und *B* als allein durch *B*. Wenn nun an Stelle von *B* ein anderer gebracht wird, welcher die mittlere Proportionale zwischen *D* und *C* ist, so geht offenbar eine noch grössere Bewegung auf *C* über, als durch Zwischenlagerung der Körper *D* und *B*. Dass nun die grösste Bewegung durch Zwischenschaltung zweier Körper für den äussersten gewonnen wird, wenn *A*, *D*, *B* und *C* der Reihe nach Proportionalen sind, wird folgendermassen bewiesen. Zuvörderst steht fest, dass die Geschwindigkeit des Körpers *C* mittelst Zwischenschaltung zweier Körper nicht zu einer beliebigen Grösse anwachsen kann; denn die Geschwindigkeit des Körpers *D* ist immer kleiner als das Zweifache der Geschwindigkeit von *A* (Lehrsatz VII). Ebenso ist die Geschwindigkeit von *B* immer kleiner als das Zweifache der Geschwindigkeit von *D*, und die für *C* erworbene

Geschwindigkeit stets kleiner als das Doppelte derjenigen von $B$, so dass die Geschwindigkeit von $C$ wenigstens kleiner als die achtfache von $A$ ist. Hieraus also sieht man, dass es eine gewisse Geschwindigkeit [398] giebt, über welche hinaus für den Körper $C$ durch Zwischenschaltung zweier Körper keine grössere gewonnen werden kann. Diese Geschwindigkeit sei $E$, welche, wie wir voraussetzten, für den Körper $C$ gewonnen ist durch Zwischenschaltung der Körper $D$ und $B$ zwischen $C$ und $A$; ich behaupte, dass $A, D, B$ und $C$ der Reihe nach Proportionalen sind. Wenn nämlich erstens $A$, $D$, $B$ keine Proportionalen wären, so würde durch Substitution eines anderen Körpers an Stelle von $D$, welcher die mittlere Proportionale zwischen $A$ und $B$ ist, eine grössere Bewegung auf $B$ übergehen, als durch die Einschaltung von $D$. Sodann gewönne ja $C$ eine grössere Geschwindigkeit als durch Zwischenschaltung von $D$ und $B$, das heisst, eine grössere Geschwindigkeit als $E$. Dies ist widersinnig, da vorausgesetzt wurde, dass $E$ die grösste Geschwindigkeit sei, die der Körper $C$ durch Zwischenlagerung zweier Körper erlangen kann. Entsprechend kann, wenn $D$, $B$ und $C$ keine Proportionalen wären, an Stelle von $B$ ein anderer Körper, die mittlere Proportionale zwischen $D$ und $C$, gebracht werden, so dass der Körper $C$ wieder eine grössere Geschwindigkeit gewönne als durch Zwischenlagerung von $D$ und $B$, daher eine grössere als die Geschwindigkeit $E$, was aus demselben Grunde widersinnig ist. Da also sowohl $A$, $D$ und $B$ als auch $D$, $B$ und $C$ Proportionalen sind, so stehen alle diese Körper $A$, $D$, $B$ und $C$ in continuirlicher Proportion. Dies war zu beweisen. Danach lässt sich auf dieselbe Art beweisen, dass durch Zwischenschaltung von drei Körpern dem Körper $C$ eine noch grössere Bewegung erteilt werden kann, als wenn nur zwei dazwischen gewesen wären, und so weiter. Durch eine ähnliche Begründung wird gezeigt, dass der Körper $C$ die grösste Bewegung erhält, wenn alle Körper in continuirlicher Proportion stehen. Also ist die Behauptung wahr.

Wenn hundert Körper der Reihe nach im Verhältniss 1 zu 2 gegeben sind, und die Bewegung vom grössten ausgeht, so findet sich nach ausgeführter Rechnung gemäss der im neunten Lehrsatz übermittelten, jedoch kurz zusammengefassten Regel, dass sich die Geschwindigkeit des kleinsten zur Geschwindigkeit, mit welcher der grösste bewegt wurde, nahezu verhält wie 2 338 500 000 000 zu 1. Wenn aber die Bewegung mit dem kleinsten beginnt, so wird die Bewegungsquantität im Ganzen nahezu im Verhältniss von 1 zu 4 677 000 000 000 vermehrt.

# Ueber die Centrifugalkraft.[18]

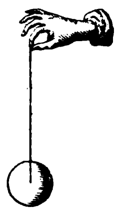
Von

## Christian Huygens.

---

[**401**] Die Schwere ist ein Antrieb zur Abwärtsbewegung. Nimmt man nun an, die Bewegung von schweren Körpern, gleichviel ob diese senkrecht oder auf schiefen Ebenen fallen, werde so beschleunigt, dass sie in gleichen Zeiten um gleiche Geschwindigkeitsmomente zunimmt, so lässt sich daraus aufs sicherste beweisen, dass die seit der Ruhelage in verschiedenen Zeiten durchlaufenen Räume sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten. Dies stimmt aber mit der Erfahrung genau überein. Daraus folgt die Richtigkeit jener Annahme. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung wird durch die Experimente Galileis und Ricciolis und die unserigen bestätigt, abgesehen von einer kleinen Abweichung durch den Luftwiderstand; aber diese ist um so geringer, je schwerer die Körper im Verhältniss zur Grösse ihrer Oberfläche sind, und in je kleineren Räumen wir den Versuch anstellen. Danach ist es durchaus glaublich, dass man unter Wegfall des Luftwiderstandes auch in sehr grossen Räumen die Bestätigung der Regel beobachten würde. Wie nun aber durch den Luftwiderstand eine Korkkugel bald dahin gelangt, dass sie von nun an mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu fallen fortfährt, so muss dies auch für die Bleikugel gelten, die so verkleinert ist, dass sie im Verhältniss zu ihrer Schwere eine gleiche Oberfläche besitzt wie die Korkkugel, d. h. dass ihr Durchmesser sich zum Durchmesser jener verhält wie das specifische Gewicht des Korks zum specifischen Gewicht des Bleies. Das habe ich bei anderer Gelegenheit gezeigt. So denke ich, dass auch

eine beliebig grosse Bleikugel bei ihrem Falle durch die Luft schliesslich zu einer gleichförmigen Bewegung gelangen wird, freilich nachdem [**402**] sie einen gewaltigen Raum durchlaufen hat; hier würde also keine constante Beschleunigung statt finden, und folglich wird eine solche überhaupt niemals mit absoluter Genauigkeit inne gehalten. Gleichwohl ist die Speculation *Galileis* über diese Bewegung darum nicht für weniger grossartig und nutzbringend zu halten; mindestens giebt sie der ganzen Mechanik schwerer Körper nichts nach, in der doch fälschlich angenommen zu werden pflegt, dass die schweren Körper in parallelen Geraden zu fallen strebten, während sie thatsächlich nach dem Erdmittelpunkt gerichtet sind. Uebrigens zum Beweise der Sätze, die wir hier erörtern, genügt es, dass in beliebig kleinen Räumen die Beschleunigung vom Ruhepunkte aus gemäss den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 wächst, wie *Galilei* gelehrt hat. —


Fig. 1.

Also, wenn ein Gewicht an einem Faden aufgehängt ist, so wird ein Zug auf den Faden ausgeübt, da ja das Gewicht in der Fadenrichtung mit derartiger Beschleunigung herabzufallen strebt.

Es kann aber durch eine in besagtem Verhältniss beschleunigte Bewegung ein grösserer oder kleinerer Weg in derselben Zeit durchlaufen werden; z. B. wenn auf einer schiefen Ebene *AB* das Gewicht am Faden *CD*, der stets von der Ebene gleichweit entfernt ist, hängt; denn auch hier strebt das Gewicht in der Richtung *DC* mit entsprechender Beschleunigung zu fallen, jedoch ohne eine ebenso grosse Strecke in einem bestimmten Zeittheilchen zu durchlaufen, wie die, welche in demselben Zeittheilchen durchlaufen werden würde, wenn das Gewicht vom senkrechten Faden herabfiele. Daher wird denn auch hier ein geringerer Zug gespürt, der um so kleiner als jener andere, senkrechte Zug ist, einen je kleineren Weg das Gewicht in derselben Zeit auf der schiefen Ebene statt auf der senkrechten zurücklegen würde. Wenn ferner zwei gleiche Gewichte, von denen jedes an einem Faden aufgehängt ist, streben, mit der gleichen Beschleunigung und so, dass sie gleiche Wege gleichzeitig zurücklegen würden, in der Zugrichtung des Fadens zu

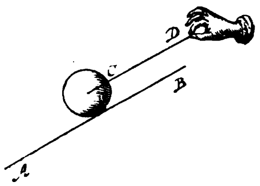


Fig. 2.

entweichen, so denken wir uns, dass auch die Anspannung der Fäden als eine gleiche fühlbar sei, ob nun der Zug nach unten oder oben oder wo sonst hin [403] gerichtet ist. Gleichviel, woraus ein derartiges Streben entspringt, wofern es nur vorhanden ist! Eben dasselbe Streben ist aber vorhanden, wenn bei gegebener Möglichkeit oder unbehindertem Streben ebendieselben Bewegungserscheinungen auftreten. Hierbei ist nur der Anfang der Bewegung zu betrachten unter Voraussetzung eines unbeschränkt kleinen Zeittheilchens.

Denn wenn z. B. die Kugel *B* am Faden *AB* herabhängt, aber seitlich die Hohlfläche *CD* berührt, so dass (siehe Fig. 3) die Verbindung des Mittelpunktes der Kugel *B* mit dem Berührungspunkt sowohl auf dem Faden wie auf der Tangentialebene an die Fläche senkrecht steht, dann wissen wir schon, dass die Kugel nirgendwo von der Oberfläche *CD* gehalten wird, vielmehr an dem Faden *AB* ebenso heftig zieht, als ob sie die Fläche *CD* gar nicht berührte, sondern frei aufgehängt wäre. Wenn sie aber vom Faden abgeschnitten wird und herabfällt, so fällt sie nicht ebenso, als ob sie frei am Faden aufgehängt gewesen wäre, sondern bewahrt beim Hinabrollen über die Fläche *CD* nicht einmal genau das Verhältniss der Beschleunigung entsprechend den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7. Daher müssen wir offenbar nicht danach sehen, was eine Zeitlang nach der Loslösung vom Faden mit dem Körper vorgeht, sondern wir haben einen unbeschränkt kleinen Zeitmoment vom Beginn der Bewegung an zu betrachten, wenn wir die Kraft des Strebens bestimmen wollen. Hier beginnt aber die Kugel *B*, nach der Trennung von dem Faden, sich so zu bewegen, wie wenn sie senkrecht herabgefallen wäre, da sie ja am Anfang die Bewegungsrichtung hat, welche längs der Geraden *AB* geht; ist doch diese der Tangentialebene an die Fläche in *C* parallel. Lasst uns nun sehen, welches und ein wie grosses Streben Körper, die an einem geschwungenen Faden oder Rade befestigt sind, haben, sich vom Mittelpunkte zu entfernen.

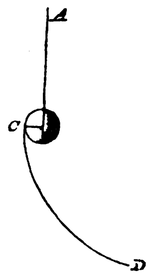


Fig. 3.

Das Rad *BG*, welches sich um *A* als Mittelpunkt dreht, sei der Horizontalebene parallel: ein an der Peripherie befestigtes Kügelchen hat (siehe Fig. 4), nachdem es beim Punkte *B* angelangt ist, das Bestreben, längs der Geraden *BH*, welche das Rad in *B* berührt, fortzufliegen: denn wenn es hier vom Rade

abgelöst wird und davon eilt, so wird es den geraden Weg *BH* einschlagen; diesen wird es nicht verlassen, ausser wenn es durch die Schwerkraft nach unten [**404**] gezogen oder sein Lauf durch den Stoss eines anderen Körpers gehemmt wird. Dies scheint beim ersten Anblick schwer zu begreifen, warum der Faden *AB* so gespannt wird, wenn die Kugel längs der auf *AB* senkrechten Geraden *BH* zu laufen strebt. Aber alles wird auf folgende Weise klar werden. Denken wir uns dieses Rad beliebig gross, so dass es einen Menschen, der auf der Peripherie in *B* steht, leicht mit sich führt, natürlich nachdem er so befestigt ist, dass er nicht herausgeschleudert werden kann. Der möge nun mit seiner Hand einen Faden halten, an dessen anderes Ende eine Bleikugel gebunden ist. Der Faden wird auf dieselbe Weise und gleich heftig von der Drehbewegung gespannt werden, ob er nun so gehalten wird, oder ob er bis nach dem Mittelpunkte *A* verlängert und dort befestigt wird. Den Grund, warum er gespannt wird, wird man nun schon deutlicher verstehen können. Man nehme die gleichen Bögen *BE*, *EF* in sehr kleinem Verhältniss zur ganzen Peripherie, etwa je ein Hundertel oder noch kleiner. Diese Bögen durchfährt also der, wie gesagt, auf dem Rade befestigte Mann in gleichen Zeiten; das Blei aber würde in denselben Zeittheilen, wenn es abgelöst würde, die Geraden *BC*, *CD* — gleich den besagten Bögen — durchlaufen, deren Endpunkte, *C* und *D*, allerdings nicht auf die Geraden fallen, welche vom Mittelpunkte *A* durch die Punkte *E* und *F* gezogen werden, sondern ein wenig nach *B* hin von diesen Linien abstehen. Nun ist klar, dass das Blei, wenn es im Punkte *B* frei gelassen wäre, sich in *C* befinden würde bei der Ankunft des Mannes in *E*, und dass es in *D* ankäme, wenn jener nach *F* gelangt ist. Daher werden wir mit Recht von dem Vorhandensein dieses Strebens in dem Blei reden. —[19])

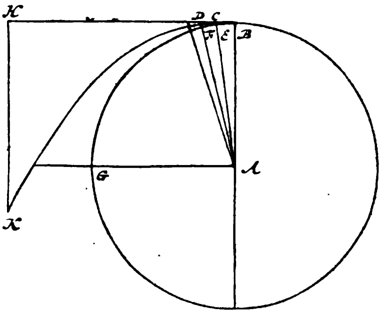


Fig. 4.

Wenn die Punkte *C*, *D* auf den Verlängerungen der Geraden *AE*, *AF* lägen, so würde sicherlich das Blei streben, von dem

Manne sich zu entfernen gemäss der Linie, welche vom Mittelpunkte durch seinen Standpunkt geht, und zwar so, dass es im ersten Zeittheilchen um $EC$ von ihm sich entfernte, im zweiten den Abstand $FD$ hätte. Diese Strecken nun, $EC$, $FD$ u. s. w. [**405**] wachsen der Reihe nach so wie die Quadratzahlen von der Einheit ab, 1, 4, 9, 16 u. s. w. Um so genauer werden sie sich dieser Reihenfolge anpassen, je kleiner die Kreisbögen $BE$, $EF$ angenommen sind, und daher darf man im Anfange es so ansehen, als sei gar keine Abweichung vorhanden. Folglich ist dieses Streben ganz ähnlich demjenigen, welches man fühlt, wenn die Kugel am Faden gehalten wird, da sie dann auch längs der Fadenlinie sich zu entfernen strebt in entsprechend beschleunigter Bewegung, so dass sie also in dem ersten Zeittheilchen die Strecke 1, nach zweien die Strecke 4, nach dreien 9 u. s. w. zurückgelegt hat. So würde sich also die Sache verhalten, wenn die Punkte $C$, $D$ auf den Verlängerungen von $AE$ und $AF$ lägen. Weil sie aber ein wenig nach $B$ hin gegen die besagten Linien zurückbleiben, so ergiebt sich, dass die Kugel nicht längs des verlängerten Radius sich von dem Manne zu entfernen strebt, sondern längs einer gewissen Curve, welche den Radius im Standpunkte des Mannes berührt. Wenn nämlich die Ebene $PQ$, die das Rad in $B$ berührt, dort befestigt wird und mit kreist, so wird die Kugel $B$, wenn sie von dem Rade oder der besagten Ebene losgelöst wird, hinsichtlich der Ebene und des Punktes $B$, die ferner mit der Bewegung fortfahren, die Curve $BRS$ beschreiben, welche den verlängerten, gleichfalls mitbewegten Radius $AB$ in $B$ berührt. Wenn wir diese Curve construiren wollen, müssen wir nur einen Faden um die Peripherie $BNM$ wickeln, und dessen Ende $B$ nach $RS$ hinführen, so dass stets der Theil, welcher den Umfang $BNM$ verlassen hat, gespannt bleibt; durch diese Bewegung nämlich wird er mit seinem äussersten Punkte die erwähnte Linie $BRS$ beschreiben; wie leicht zu beweisen. Nun hat diese Linie die Eigenschaft, dass, wenn man an einen beliebigen Punkt der Peripherie, etwa $N$, die Tangente zieht, welche die Curve in $R$ schneidet, die Strecke $NR$ gleich dem Bogen

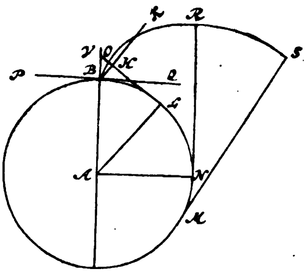


Fig. 5.

*NB* ist, wie sich aus der Construction offenbar ergiebt. Zu beweisen ist jedoch, dass sich die Curve und die Gerade *AB* im Punkte *B* berühren. Die Tangente *NR* des Kreises sei [**406**] parallel *AB*. Es steht fest, dass der Curventheil *BR* ganz zwischen den Parallelen *AB* und *NR* liegt; denn wenn ein beliebiger Punkt auf ihm, etwa *O* ins Auge gefasst wird, durch welchen die Tangente *VOL* an den Kreis gezogen wird, so ist *LO* gleich dem Bogen *LB* und daher kleiner als *LV*, die Tangente an denselben Bogen. Folglich muss der Punkt *O* zwischen *V* und *L* liegen. Dasselbe kann hinsichtlich jedes beliebigen auf *BR* angenommenen Punktes bewiesen werden.

Wenn man nun behauptete, die Gerade *BV* berühre die Curve *BR* nicht in *B*, so würde von *B* aus eine beliebige Gerade *BK*, die in so kleinen Winkel gegen *BV* geneigt ist, dass sie die Curve *BR* nicht schneidet, gezogen werden können. Man ziehe den Radius *AL* parallel *BK*. Es möge *LH* senkrecht auf *BK* stehen, folglich auch auf *AL*. Daher ist *LH* gleich dem Sinus des Bogens *BL*, mithin kleiner als dieser Bogen. Diesem Bogen gleich ist aber die Gerade *LHO*, die von dem Berührungspunkte *L* und der Curve *BR* begrenzt ist. Folglich fällt ein Theil der Curve *BR*, worauf Punkt *O* liegt, zwischen den Winkel *VBK*, wie klein derselbe auch gedacht wird. Hieraus geht hervor, dass die Gerade *BK* die Curve schneidet, und dass daher *BV* sie in *B* berührt.

Da also die mit dem Rade herumgeschwungene Kugel in Ansehung des Radius, auf dem sie liegt, eine Curve zu be-

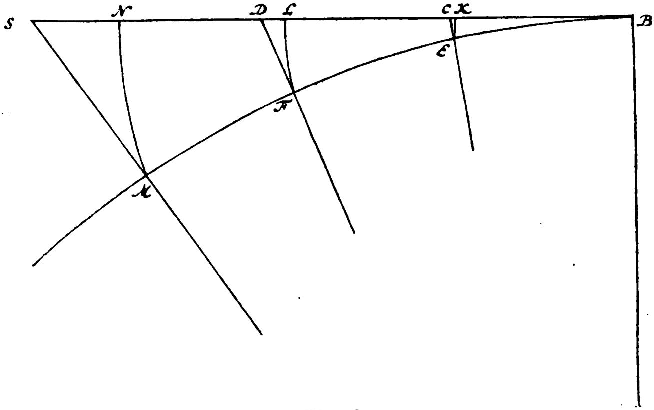



Fig. 6.

schreiben strebt, und zwar eine solche, die den Radius berührt, so muss durch diesen Antrieb offenbar der Faden, woran sie befestigt ist, nicht anders gespannt werden, als ob die Kugel längs des verlängerten Fadens zu laufen strebte.

Nun verhalten sich auch die Wege, welche die Kugel auf der besagten Curve in gleichförmig wachsenden Zeiten zurücklegen würde, wie die Reihenfolge der Quadrate von der Einheit ab, 1, 4, 9, 16 u. s. w., wenn wir nämlich den Anfang der Bewegung und ganz kleine Wege in Betracht ziehen, wie obige Figur zeigt, wo als gleiche Bögen auf der Peripherie des Rades angenommen sind *BE*, *EF*, *FM*, und auf der Tangente *BS* die den besagten Bögen gleichen Strecken *BK*, *KL*, *LN*; von dem Mittelpunkte kommen die Geraden *EC*, *FD*, *MS*. Wenn sich also hier die Kugel von dem gedrehten Rade in *B* losrisse [**407**], so würde bei der Ankunft des Punktes *B* in *E* die Kugel in *K* sein und hätte den kleinen Theil *EK* der oben beschriebenen Curve durchmessen; nach Verlauf des nächsten Zeittheilchens, wenn *B* in *F* ist, würde sich die Kugel in *L* befinden und hätte jetzt den Theil *FL* der Curve durchlaufen. Ebenso würde die Kugel den Curventheil *MN* durchlaufen haben, sobald *B* in *M* angelangt sein würde. Diese Curventheile kann man gewissermassen als identisch mit den Geraden *EC*, *FD*, *MS*, welche sie berühren, betrachten, beim Beginne der Trennung der Kugel von dem Rade, da ja so kleine Bögen vom Punkte *B* aus angenommen werden können, dass der Unterschied zwischen diesen Geraden und Curven ein geringeres Verhältniss zu ihrer Länge hat, als irgend angebbar.[20])

Danach muss man also die Strecken *EK*, *FL*, *MN* ansehen, als ob sie wüchsen wie die Quadratzahlen von der Einheit ab, 1, 4, 9, 16 u. s. w. Und daher ist das Streben der auf dem gedrehten Rade befestigten Kugel nicht anders, als ob sie sich auf der Verlängerung der Geraden, welche den Mittelpunkt mit ihr verbindet, fortbewegen wolle, und zwar mit einer beschleunigten Bewegung, womit sie in gleichen Zeiten Strecken, die wie die Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. zunehmen, zurücklegen würde. Es genügt, dass am Anfang diese Progression innegehalten werde; denn hinterher mag die Kugel nach irgend welchem anderen Verhältnisse oder Bewegungsgesetz fliegen, das hat dann keine Beziehung zu dem Streben, welches vor dem Beginn der Bewegung vorhanden ist. Besagtes Streben aber ist demjenigen sehr ähnlich, mit welchem an Fäden hängende Gewichte zum Herabfallen drängen. Daraus werden wir

auch schliessen, dass sich die Centrifugalkräfte ungleicher bewegter Körper, die jedoch auf gleichen Kreisen mit gleicher Geschwindigkeit geschwungen werden, zu einander verhalten wie die Gewichte der Körper, oder wie die Massen. Wie nämlich alle schweren Körper mit derselben Geschwindigkeit und mit gleicher Beschleunigung zu fallen streben, und wie ferner dieses Streben um so grössere Wucht hat, je grösser sie sind, ebenso muss es sich auch hinsichtlich derer, die vom Mittelpunkte fliehen, ergeben, deren Antrieb [**408**], wie gezeigt wurde, dem Streben ganz analog ist, dessen Ursache die Schwere ist. Während aber der Antrieb zum Fallen für dieselbe Kugel immer gleich ist, so oft sie an einem Faden aufgehängt wird, so ist andererseits das Streben einer im Kreise geschwungenen Kugel desto kleiner oder grösser, je langsamer oder schneller das Rad sich dreht; es bleibt noch übrig, die Grösse oder Quantität eines jeden Antriebes bei verschiedenen Geschwindigkeiten des Rades zu untersuchen. Und zunächst werden wir erforschen, mit welcher Geschwindigkeit das Rad gedreht werden muss, damit die Kugel ebenso stark ihren Faden spanne, als ob sie senkrecht von ihm herabhinge.

## Lehrsatz I.[21])

*Wenn zwei gleiche Körper in gleichen Zeiten ungleiche Kreisumfänge durchlaufen, so verhält sich die Centrifugalkraft auf dem grösseren Kreise zu derjenigen auf dem kleineren, wie sich die Kreisumfänge oder ihre Durchmesser zu einander verhalten.*

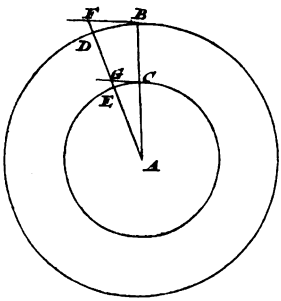



Fig. 7.

Gegeben seien die beiden Kreise mit den Radien $AB$, $AC$, auf denen in gleichen Zeiten zwei gleiche Körper umlaufen. Man nehme auf beiden Kreisen die ähnlichen kleinen Bögen $BD$, $CE$; sodann seien auf den Tangenten durch Punkt $B$, bezw. $C$, die Strecken $BF$ und $CG$ je ihrem betreffenden Bogen gleich. Der auf dem Kreise $BD$ rotirende Körper hat das Bestreben, vom Mittelpunkte in der Verlängerung seines Fadens mit natürlich beschleunigter Bewegung sich zu entfernen und mit dieser Bewegung in einem bestimmten Zeittheil die Strecke $DF$ zu

durchmessen. Der auf dem Kreise $CE$ rotirende Körper hat einen entsprechenden Antrieb, vom Mittelpunkte fortzueilen, und zwar so, dass er in jener selben Zeit die Strecke $EG$ zurücklegen würde. Um so grösser also $DF$ als $EG$ ist, mit um so grösserer Kraft wird der Faden auf dem grösseren Kreise als auf dem kleineren gespannt. Nun ist klar, dass sich $FD$ zu $GE$ wie $BF$ zu $CG$, somit wie $BA$ zu $AC$ verhält. Folglich verhält sich die Centrifugalkraft auf dem grösseren Kreise [**409**] zu derjenigen auf dem kleineren, wie die Kreisumfänge zu einander oder ihre Durchmesser. W. z. b. w.

## Lehrsatz II.

*Wenn gleiche bewegliche Körper auf demselben oder auf gleichen Kreisen oder Rädern mit ungleichen Geschwindigkeiten rotiren, jedoch jeder mit gleichförmiger Bewegung, so verhält sich die Kraft des schnelleren, sich vom Mittelpunkte zu entfernen, zur Kraft des langsameren, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Das heisst, wenn die Fäden, womit jene Körper gehalten werden, vom Mittelpunkte des Rades nach unten gezogen werden und Gewichte tragen, durch welche die Centrifugalkraft der Körper aufgehoben und genau ausgeglichen wird, so verhalten sich diese Gewichte zu einander wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.*

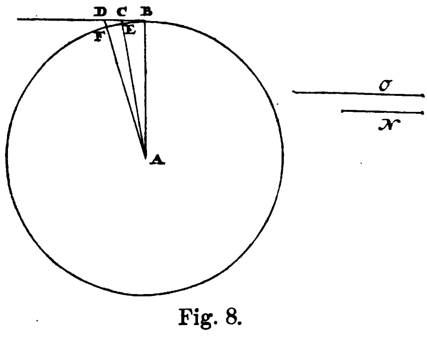


Fig. 8.

Auf dem Kreise mit dem Mittelpunkt $A$ und dem Radius $AB$ rotire der erste Körper langsamer, mit der Geschwindigkeit, welche die Strecke $N$ vorstellt, ferner der zweite mit der grösseren Geschwindigkeit, welche gleich $O$ sei. Nimmt man nun die beiden ganz kleinen Bögen $BE$ und $BF$, welche sich wie $N$ zu $O$ verhalten, so ist gewiss, dass in derselben Zeit, in welcher der langsamere Körper den Bogen $BE$ durchmisst, der schnellere Körper den Bogen $BF$ durchläuft (siehe Fig. 8). Es sollen den Bögen $BE$ und $BF$ die auf der Tangente liegenden Strecken $BC$ und $BD$ gleich sein. Und so steht auch fest, dass jeder der beiden Körper

den Antrieb besitzt, vom Mittelpunkte sich zu entfernen in der Verlängerung seines Fadens, mit beschleunigter Bewegung, und zwar so, dass der langsamer kreisende Körper von dem Punkte der Peripherie, auf dem er sich befindet, um die Strecke $EC$ forteilen will, der schnellere aber in gleicher Zeit um die Strecke $FD$. In dem Verhältniss, in welchem $DF$ grösser als $CE$ ist, übt der schnellere Körper einen stärkeren Zug aus, als der langsamere. Da wir nun die Bögen $BE$ und $BF$ unbegrenzt klein angenommen haben, so ist das Verhältniss von $DF$ zu $CE$ gleichzuachten demjenigen von $DB^2$ zu $CB^2$ nach Massgabe dessen, was wir vorher auseinandergesetzt haben. Und es verhält sich wie $DB$ zu $BC$ so Bogen $FB$ zu $BE$, d. h. $O$ zu $N$. Also verhält sich wie [**410**] $O^2$ zu $N^2$ so $FD$ zu $EC$, und danach ebenso die Centrifugalkraft des schnelleren zu der des langsameren Körpers. W. z. b. w.

## Lehrsatz III.

*Wenn zwei gleiche Körper auf ungleichen Kreisen mit gleicher Geschwindigkeit rotiren, so verhalten sich ihre Centrifugalkräfte umgekehrt wie die Durchmesser, so dass auf dem kleineren Kreise die besagte Kraft grösser ist.*

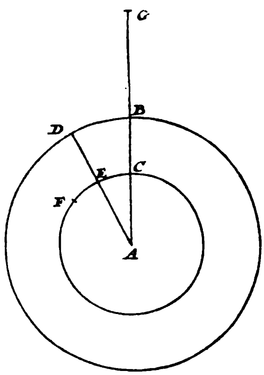


Fig. 9.

Die ungleichen Kreise, deren Radien $AB$ und $AC$ sind, sollen das gemeinsame Centrum $A$ haben. Auf ihren Umfängen mögen zwei gleiche Körper mit gleicher Geschwindigkeit rotiren, d. h., dass in der Zeit, in welcher auf dem grösseren Kreise der Bogen $BD$ durchlaufen wird, auch auf dem kleineren Kreise der mit $BD$ an Länge übereinstimmende Bogen $CF$ durchlaufen wird. Ich behaupte, die Centrifugalkraft des auf dem Umfang $BD$ rotirenden Körpers verhält sich zu derjenigen des auf dem Umfange $CF$ rotirenden wie der Radius $AC$ zu $AB$. Man ziehe den Radius $AD$, welcher den kleineren Kreis in $E$ schneidet, und zu $AC$ und $AB$ sei $AG$ die dritte Proportionale. Ferner denke man sich einen Körper, der so gross wie die beiden ersten ist, auf dem Umfange $CF$ so rotirend,

dass er in derselben Zeit den Bogen $CE$ zurücklegt, in welcher die beiden anderen die Bögen $BD$ und $CF$ durcheilen. Folglich verhält sich die Geschwindigkeit jenes hinzugezogenen Körpers zur Geschwindigkeit jedes der beiden anderen, wie der Bogen $CE$ zum Bogen $BD$, d. h. wie $AC$ zu $AB$. Nun verhält sich die Centrifugalkraft des Körpers, welcher den Bogen $BD$ durchläuft, zu derjenigen des hinzugenommenen, der in derselben Zeit den Bogen $CE$ durcheilt, wie $BA$ zu $AC$ (Lehrsatz I). Dagegen verhält sich die Centrifugalkraft des hinzugenommenen Körpers zu derjenigen des Körpers, welcher in derselben Zeit den Bogen $CF$ durchläuft (Lehrsatz II), wie $AC^2$ zu $AB^2$, d. h. so wie $AC$ zu $AG$, da ja, wie gezeigt, ihre Geschwindigkeiten sich wie $AC$ zu $AB$ verhalten. In Folge dessen [**411**] verhält sich die Centrifugalkraft des den Bogen $BD$ durchlaufenden Körpers zur Kraft desjenigen, welcher gleichzeitig den gleichen Bogen $CF$ durchläuft, wie $BA$ zu $AG$, d. h. wie $AC$ zu $AB$. W. z. b. w.

## Lehrsatz IV.

*Wenn zwei gleiche auf ungleichen Kreisen rotirende Körper gleiche Centrifugalkraft haben, so verhält sich die Umlaufszeit auf dem grösseren Kreise zur Umlaufszeit auf dem kleineren wie die Quadratwurzeln aus den Durchmessern.*

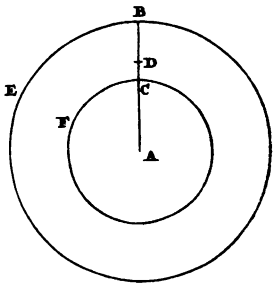


Fig. 10.

Die ungleichen Kreise $BE$ und $CF$, deren Radien $AB$ und $AC$ sind, sollen denselben Mittelpunkt $A$ haben. Auf jedem von beiden rotire ein Körper so, dass beiderseits die gleiche Centrifugalkraft vorhanden ist. Ich behaupte, die Zeit, in welcher der Umfang des Kreises $BE$ durchlaufen wird, verhält sich zur Zeit, in welcher der Umfang $CF$ durchlaufen wird, wie die Quadratwurzel aus $AB$ zur Quadratwurzel aus $AC$, d. h. wie $BA$ zu $AD$, der mittleren Proportionalen zwischen $AB$ und $AC$. Denkt man sich nämlich einen dritten beweglichen Körper jenen beiden gleich, der in derselben Zeit den Umfang $CF$ umkreist, in welcher der andere den Umfang $BE$ durcheilt, so verhält sich die Centrifugalkraft des hinzugenommenen Körpers zur Centrifugalkraft dieses letzteren

wie $AC$ zu $AB$ (Lehrsatz I). Nun werden aber die Centrifugalkräfte der beiden zuerst betrachteten Körper als gleich angenommen; also verhält sich auch die Centrifugalkraft des hinzugenommenen Körpers zur Kraft dessen, welchen wir auf dem Kreise $CF$ laufen liessen, wie $AC$ zu $AB$; nun verhalten sich aber die Centrifugalkräfte der Körper, welche sich auf derselben Peripherie bewegen, wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten (Lehrsatz II). Also verhält sich die Geschwindigkeit des hinzugenommenen Körpers zur Geschwindigkeit dessen, welchen wir zuerst auf $CF$ kreisen liessen, wie $AC$ zu $AD$, oder wie $AD$ zu $AB$. Den Geschwindigkeiten entsprechen aber im umgekehrten Verhältnis die Zeiten der Umläufe um denselben Kreis; also verhält sich die Umlaufszeit [**412**] des hinzugenommenen Körpers, welcher nach der Voraussetzung die Umlaufszeit des auf der Peripherie $BE$ bewegten gleich ist, zur Umlaufszeit dessen, welchen wir auf dem Kreise $CF$ anfangs rotiren liessen, wie $AB$ zu $AD$. W. z. b. w.

## Lehrsatz V.[22])

*Wenn ein Körper auf einem Kreisumfange mit derjenigen Geschwindigkeit umläuft, welche er durch den Fall erwirbt aus der Höhe, welche dem vierten Theile des Durchmessers gleich ist, so hat er eine seiner Schwere gleiche Centrifugalkraft, d. h. er zieht an dem Faden, der ihn hält, ebenso heftig, als ob er an ihm herabhinge.*

Der Kreis mit dem Mittelpunkt $A$ und dem Radius $AB$ soll dem Horizont parallel sein. Auf seinem Umfange möge ein Körper mit gleichförmiger Bewegung rotiren, mit derjenigen Geschwindigkeit, welche er durch den senkrechten Fall von der Höhe $CB$ gleich der Hälfte von $AB$ erlangen würde. Ich behaupte, der Faden, durch welchen der bewegliche Körper gehalten wird, erleidet einen solchen Zug, als ob der Körper an eben demselben Faden frei herabhinge.

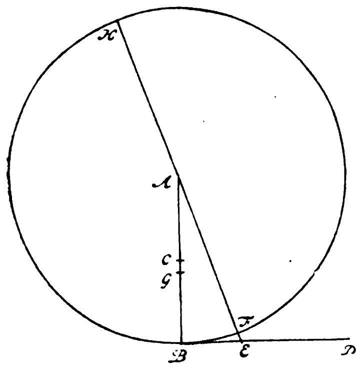


Fig. 11.

Die Tangente an dem Kreis, *BD*, sei gleich dem Radius *AB*.

Da der Körper auf dem Kreisumfange mit der Geschwindigkeit läuft, welche er durch den Fall von der Höhe *CB* erlangt, also mit derselben, mit welcher er, gleichförmig bewegt, die Strecke *BD*, das Doppelte von *BC*, in der gleichen Zeit zurücklegen würde, in welcher er durch *CB* fiel, so folgt, dass er, wenn er in *B* freigelassen würde, in besagter Zeit den genannten Weg *BD* in gleichförmiger Bewegung durcheilen würde. Man nehme auf *BD* die minimale Strecke *BE* an und ziehe durch den Mittelpunkt die Gerade *EAH*, die den Umfang in *F* schneidet. Ferner möge sich wie $DB^2$ zu $BE^2$ so die Länge *BC* zu *CG* verhalten. Wenn wir nun festsetzen, dass die Zeit, in welcher der Körper mit beschleunigter Bewegung durch *CB* fällt, durch die Linie *BD* repräsentirt wird, so ist *BE* die Zeit der [**413**] beschleunigten Bewegung durch *CG*. Indessen ist *BD* auch die Zeit, in welcher der Körper *BD* selbst mit derselben gleichförmigen Bewegung zurücklegen würde, welche er beim Laufe durch die Peripherie besitzt; denn diese Zeit ist nach der Voraussetzung gleich der Zeit der beschleunigten Bewegung durch *CB*. Folglich ist auch *BE* die Zeit, in welcher er die Strecke *BE* mit der Rotationsgeschwindigkeit, die er besitzt, durchliefe. Daher steht fest, dass in gleicher Zeit die Strecke *CG* mit der von der Ruhelage an beschleunigten Bewegung zurückgelegt wird, in welcher die Strecke *BE* mit gleichförmiger Bewegung und der Geschwindigkeit, welche für den Umlauf des Körpers auf dem Kreise bestimmt worden ist, durchmessen wird. Ferner steht fest, dass der Körper, wenn er in *B* freigelassen wird, mit gleichförmiger Bewegung gleichzeitig nach *E* gelangt, wenn der Kreispunkt *B* bis *F* gerückt ist; denn die Gerade *BE* ist dem Bogen *BF* gleich zu setzen, weil *BE* als unendlich klein angenommen wird. Daher werden wir sagen, der Körper besitze den Antrieb, mit natürlich beschleunigter Bewegung (denn dass sie eine solche sei, ist bewiesen) von dem Punkte *B* sich zu entfernen, und zwar um die Strecke *FE*, in derselben Zeit, in welcher er mit seiner Rotationsgeschwindigkeit in gleichförmiger Bewegung die Strecke *BE* durchlaufen würde, d. h. in der Zeit, in welcher er mit der von der Ruhelage ab beschleunigten Bewegung die Strecke *CG* durchlaufen würde. Wenn daher bewiesen ist, dass die Strecken *CG* und *FE* gleich sind, so ist

ausgemacht, dass der Antrieb des aufgehängten Körpers zum Fall mit beschleunigter Bewegung genau gleich dem Antrieb desselben Körpers ist, wonach er bei der Rotationsbewegung von seinem Faden mit gleichfalls beschleunigter Bewegung los zu kommen strebt; denn offenbar sind die Antriebe zu beschleunigten Bewegungen dann gleich, wenn gleiche Wege in gleichen Zeiten mit diesen Bewegungen zurückgelegt würden. Dass aber $CG$ und $FE$ gleich sind, beweist man so: $HE$ verhält sich zu $EB$ wie $EB$ zu $EF$ und daher $HE^2$ zu $EB^2$ wie die Strecke $HE$ zu $EF$. Dividirt man nun die Vorderglieder durch vier, so verhält sich $AF^2$ zu $EB^2$ wie der vierte Theil von $HE$, dem $\frac{1}{4} HF$ gleich zu achten ist, also $BC$ zu $FE$; aber wie $AF^2$ zu $BE^2$ oder wie [414] $DB^2$ zu $BE^2$, so verhält sich laut Construction die Strecke $BC$ zu $CG$. Also verhält sich $BC$ zu $CG$ wie $BC$ zu $FE$, und daher sind $FE$ und $CG$ gleich; deshalb ist die Behauptung richtig.

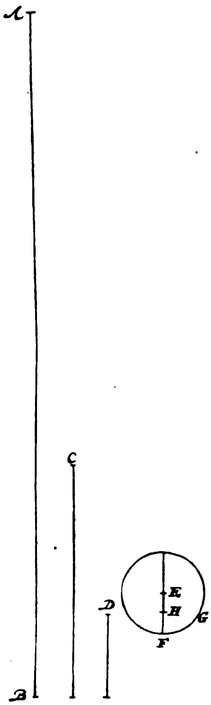


Fig. 12.

## Lehrsatz VI.[23])

*Bei gegebener Höhe, welche ein Körper in bestimmter Zeit, z. B. in einer Secunde, im senkrechten Fall aus der Ruhelage durchläuft, ist der Kreis zu finden, auf dessen Peripherie der Körper horizontal rotirend und in ebenfalls einer Secunde die Umkreisung vollendend eine seiner Schwere gleiche Centrifugalkraft besitzt.*

Die gegebene Höhe sei $AB$, welche ein Körper in einer Secunde von der Ruhelage ab durchfällt. Wie die Peripherie des Kreises zu seinem Durchmesser, so soll sich $AB$ zur Strecke $C$ und diese wieder zu einer dritten $D$ verhalten. Man beschreibe mit dem Durchmesser von der Länge $D$ den Kreis $EFG$; ich behaupte, dieser sei der verlangte. Es werde der Radius $EF$ in $H$ halbirt. Folglich besitzt der Körper, wenn er auf dem Kreise $FG$ mit derjenigen Ge-

schwindigkeit, welche er durch den Fall aus der Höhe $HF$ erlangt, in gleichförmiger Bewegung umläuft, die seinem Gewicht gleiche Centrifugalkraft (Lehrsatz V). Wenn wir daher nur gezeigt haben, dass der ganze Kreis $FG$ in der Zeit einer Secunde mit der besagten Geschwindigkeit einmal umlaufen wird, so ist sofort erwiesen, dass der Kreis $EFG$ der Anforderung genügt. Fest steht, dass der Körper in gleichförmiger Bewegung und mit der Endgeschwindigkeit, die er beim Fall durch $HF$ erlangte, das Doppelte der Strecke $HF$ selbst in der gleichen Zeit, in welcher er durch $HF$ fiel, zurücklegen wird. Wenn er also mit der besagten erworbenen Geschwindigkeit in gleichförmiger Bewegung den Kreis $FG$ durchläuft, so verhält sich die Zeit des Umlaufs zur Zeit des Falls durch $HF$ wie die Peripherie $FG$ zum Doppelten von $HF$, d. h. zu $EF$. Und [**415**] multiplicirt man die Hinterglieder der Proportion mit zwei, so verhält sich die Zeit des gleichförmigen Kreisumlaufs durch $FG$ zur doppelten Zeit des Falls durch $HF$, somit zur Zeit des Falls durch $D$ (denn $D$ ist das Vierfache von $HF$) wie der Kreisumfang $FG$ zu $2FE$ oder zu $D$, somit wie $C$ zu $D$ (denn $C$ ist nothwendigerweise der Peripherie $FG$ gleich) folglich wie $AB$ zu $C$. Wie sich aber $AB$ zu $C$, so verhält sich die Fallzeit durch $AB$, d. h. die Zeit einer Secunde, zur Fallzeit durch $D$, da sich ja $AB$ zu $D$ wie $AB^2$ zu $C^2$ verhält. Folglich verhält sich die besagte Zeit des gleichförmigen Umlaufs um die Peripherie $FG$ zur Zeit des Falls durch $D$ wie die Zeit einer Secunde zur Zeit des Falls durch $D$. Also ist die besagte Umlaufszeit um die Peripherie $FG$ gleich der Zeit einer Secunde. Dies musste bewiesen werden.

Da die Berechnung lehrt, dass die Höhe $AB$, welche der fallende Körper in einer Secunde zurücklegt, gleich 15 rheinländische Fuss und $7^1/_2$ Zoll ist (siehe »Pendeluhr« S. 155), und da sich $AB$ zu $C$ wie die Peripherie zum Durchmesser, somit wie 22 zu 7, nach *Archimedes*, verhält, und ebenso $C$ zu $D$ oder zum Durchmesser des Kreises $FG$, so fällt dieser Durchmesser nahezu gleich 19 Unzen aus, wovon die Hälfte 9 Unzen 6 Linien beträgt. Wenn daher ein Körper in der Zeit einer Secunde einen einzelnen Umlauf auf einem Kreise vollendet, dessen Radius gleich $9^1/_2$ Unzen ist, so kommt die Centrifugalkraft des Körpers seiner Schwere gleich.

## Hilfssatz I.

Wenn das Gewicht $C$ auf der schiefen Ebene $AB$ von dem frei herabhängenden Gewichte $D$ gehalten wird, und wenn das Seil $CE$ wagerecht ist, so verhält sich das Gewicht $D$ zum Gewicht $C$ wie die Höhe $BF$ zur Grundlinie $FA$. Dies ist eine in der Mechanik ausgemachte Sache. Ist also $BF$ gleich $FA$ genommen, so muss das Gewicht $D$ gleich demjenigen von $C$ sein [**416**].

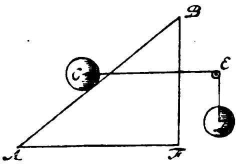


Fig. 13.

## Hilfssatz II.

Wenn gleiche Gewichte auf Ebenen von verschiedener Neigung durch wagerechte Fäden gehalten werden, so sind die haltenden Kräfte den Tangenten der Winkel proportional, unter denen die Ebenen zur Horizontalebene geneigt sind.

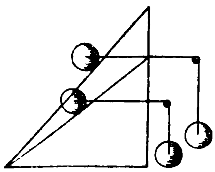


Fig. 14.

## Lehrsatz VII.[24])

*Auf der gekrümmten Oberfläche eines Rotationsparaboloides, dessen Axe senkrecht steht, geschehen alle Umläufe eines die horizontalen Parallelkreise durcheilenden Körpers, die grossen wie die kleinen, in gleichen Zeiten. Diese Umlaufszeit ist gleich der von zwei Schwingungen eines Pendels von der Länge des halben Parameters der erzeugenden Parabel.*

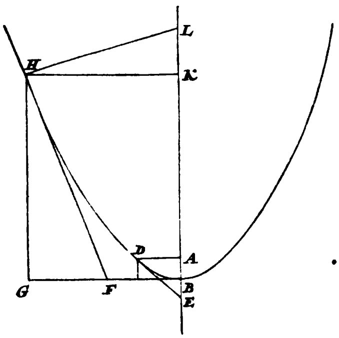



Fig. 15.

$HDB$ sei die Parabel, durch deren Umdrehung um die Axe $BK$ das Paraboloid entstehen soll. Auf jener Axe nehme man $BA$ gleich $^1/_4$ des Parameters; so ist die Ordinate $AD$ gleich der Hälfte des Parameters. Nun denke man sich den Körper in $D$ um die Axe $AB$ mit der Geschwindigkeit rotirend, dass die Centrifugalkraft gleich seiner Schwere ist. Diese Kraft hält also den Körper im Punkte $D$,

da der Winkel $ADE$ ein halber Rechter ist (Hilfssatz I). Wenn jedoch der Körper anderswo rotirt, z. B. in $H$, wobei $K$ Mittelpunkt und $KH$ der Abstand von diesem ist, so ist die Centrifugalkraft, wodurch er in $H$ gehalten wird, gleich der in horizontaler Richtung $KH$ wirkenden Kraft, von welcher der Körper auf der Ebene $HF$, die das Paraboloid berührt, gehalten werden kann. Diese Kraft verhält sich nun nach dem ersten Hilfssatze zur Schwere wie $HG$ zu $GF$ oder, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke, da $HL$ normal zu $HF$ angenommen wird, wie $HK$ zu $KL$ oder wie $HK$ zu $AD$, da gemäss der Natur der Parabel [**417**] $KL$ immer gleich dem halben Parameter ist. Also die Centrifugalkraft, wodurch der kreisende Körper in $H$ gehalten wird, verhält sich zum Gewicht des Körpers oder zur Centrifugalkraft in $D$, wie $HK$ zu $DA$. Daher vollenden sie ihre Kreisbewegungen (gemäss der Umkehrung von Lehrsatz I) in gleicher Zeit.

Die Zeit nun, in welcher die Umläufe geschehen, bestimmt man folgendermassen. Da wir vorausgesetzt haben, der Körper $D$ rotire so, dass er die seiner Schwere gleiche Centrifugalkraft besitzt, so rotirt er mit derjenigen Geschwindigkeit, welche er beim senkrechten Fall von der halben Höhe $AD$ erwerben würde (Lehrsatz V). Aber mit dieser Geschwindigkeit würde er in der Zeit dieses Falles die Strecke $DA$ mit gleichförmiger Bewegung zurücklegen. Also verhält sich die Rotationszeit zur Fallzeit durch die Hälfte von $DA$ wie die Peripherie des Kreises zum Radius $DA$. Nun verhält sich die Zeit einer minimalen Schwingung zur Zeit des senkrechten Falles von der halben Höhe des Pendels (»Pendeluhr«, 2. Teil, Lehrsatz XXV) wie die Peripherie des Kreises zum Durchmesser, und daher verhält sich die Zeit zweier minimaler Schwingungen des Pendels $DA$ zur Zeit des senkrechten Falles von der halben Höhe $DA$ wie die Peripherie des Kreises zum Radius, d. h. wie die Zeit des ganzen Umlaufs zur selben Zeit des senkrechten Falles durch die Hälfte von $DA$. Also ist die Umlaufszeit auf dem Paraboloid gleich der Zeit, in welcher zwei Schwingungen des Pendels von der Länge $DA$, also von der des halben Parameters der erzeugenden Parabel stattfinden. W. z. b. w. [**418**].

## Lehrsatz VIII. [25])

*Wenn zwei bewegliche an ungleichen Fäden aufgehängte Körper so rotiren, dass sie horizontale Kreisperipherien durchlaufen, wobei das eine Fadenende unbewegt bleibt, und wenn die Axen oder Höhen der Kegel, deren Mäntel die Fäden durch diese Bewegung beschreiben, gleich sind, so sind auch die Zeiten, in denen jeder der Körper seinen Umlauf beendigt, gleich.*

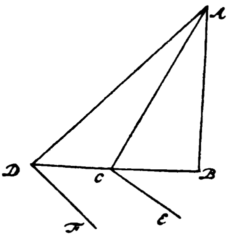


Fig. 16.

Die Fäden $AC$ und $AD$ mögen an derselben Spitze $A$ befestigt sein, und an ihnen hänge je ein Körper in $C$ und $D$. Diese Körper sollen auf den horizontalen Kreisen mit den Radien $BC$, $BD$ rotiren. $AB$ sei die gemeinsame Axe beider Kegel, um welche die Fäden $AC$ und $AD$ ihr Umlauf führt. Ich behaupte, dass die Umlaufszeiten einander gleich sind. Zunächst lasse man die Körper gleich sein. $CE$ möge senkrecht auf $AC$, und $DF$ senkrecht auf $AD$ stehen. Fest steht nun, dass es die Centrifugalkraft ist, welche die Fäden in dieser Neigung gestreckt hält. Da der Körper $C$ gemäss seiner Schwere denselben Antrieb zum Fall besitzt, als ob er auf der Ebene $CE$ läge, aber die Centrifugalkraft, wonach er strebt, sich von der Axe $AB$ längs $BC$ zu entfernen, diesen Fallantrieb aufhebt, so ist es nothwendig, dass die besagte Centrifugalkraft gleich der Kraft sei, die in horizontaler Richtung $BC$ wirkend den Körper $C$ auf der schiefen Ebene $CE$ festhalten würde. Aus dem gleichen Grunde ist es nothwendig, dass die Centrifugalkraft, von welcher $D$ gehalten wird, der horizontalen Kraft gleich sei, wodurch der Körper auf der Ebene $DF$ gehalten werden würde. Es verhält sich jedoch diese Kraft zu jener ersten, welche den Körper $C$ halten sollte, wie tang $BDF$ zu tang $BCE$ (Hilfssatz II), somit wie tang $DAB$ zu tang $CAB$, also wie $DB$ zu $CB$. Folglich verhält sich die Centrifugalkraft, welche der Körper [**419**] $D$ auf seinem Kreise besitzt, zur Centrifugalkraft des Körpers $C$ auf seinem Kreise wie der Halbmesser $DB$ zum Halbmesser $CB$. Woraus nach der Umkehrung von Lehrsatz I folgt, dass die Rotationszeiten gleich sind.

Sind jedoch die Körper ungleich, so hat es mit der Gleich-

heit der Zeiten nichtsdestoweniger seine Richtigkeit. Denn wenn z. B. der Körper $C$ schwerer angenommen wird, als er vorhin war, so wird er auch einer um so grösseren horizontalen Kraft bedürfen, je schwerer er ist, um auf der schiefen Ebene $CE$ gehalten zu werden, und er wird dann eine um so grössere Centrifugalkraft erfordern. Um diese aber zu haben, muss er den Kreis in derselben Zeit durchlaufen wie vorher, als er von geringerem Gewicht angenommen wurde, wie sich aus dem oben Gesagten ergiebt. Also ist der Lehrsatz wahr.

## Lehrsatz IX.

*Die Zeiten des Umlaufes durch die horizontalen Kreise $CD$ und $BE$ verhalten sich bei demselben Rotationswinkel $CAD$ wie die Quadratwurzeln aus den Fadenlängen $AC$ und $AB$.*

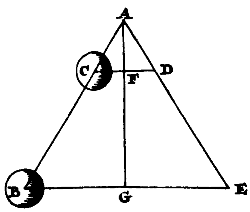



Fig. 17.

Es ist nämlich dieselbe Centrifugalkraft vorhanden bei jeder derartigen Umkreisung zur Erhaltung derselben Neigung des Fadens. Wenn aber die besagte Kraft dieselbe ist, dann müssen sich wie die Quadrate der Zeiten, in denen die Kreise umlaufen werden, ebenso die Abstände von der Umdrehungsaxe verhalten (nach der Umkehrung des vierten Lehrsatzes). Also verhalten sich hier wie $CF$ zu $BG$, d. h. wie $AC$ zu $AB$ so die Quadrate der Umlaufszeiten. W. z. b. w. [**420**].

## Lehrsatz X.

*Wenn zwei Körper von beliebiger Grösse an Fäden hängend horizontale Kreise beschreiben, so verhalten sich die Umlaufszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Höhen der Kegel, deren Mäntel von den Fäden beschrieben werden.*

Die Fäden (Fig. 18) seien $AC$ und $AD$. Die an ihnen befestigten Körper $C$ und $D$ mögen horizontale Kreise beschreiben, während die Fadenenden in $A$ unbewegt bleiben. $C$ führe seinen Faden $AC$ auf dem Mantel des Kegels mit der Axe $AB$ herum, und $D$ beschreibe mit dem Faden $DA$ den Mantel des Kegels mit der Axe $AE$. Ich behaupte, dass die Umlaufszeit des Körpers

$C$ zur Umlaufszeit des Körpers $D$ im Verhältnisse der Quadratwurzeln aus $AB$ und $AE$ steht. Man denke sich nämlich einen anderen Körper am Faden $AF$ befestigt, der durch seine Umdrehung einen Kegel beschreibt, dessen Seitenlinie $AF$, dessen Axe $AB$ ist. Dessen Umlaufszeit ist gleich der Umlaufszeit des Körpers $C$ (Lehrsatz VIII). Nun verhält sich die Umlaufszeit des Körpers $F$ zur Umlaufszeit des Körpers $D$ wie die Quadratwurzel aus $AF$ zu der aus $AD$ (Lehrsatz IX) oder wie $\sqrt{AB}$ zu $\sqrt{AE}$. Folglich verhält sich die Umlaufszeit des Körpers $C$ zur Umlaufszeit des Körpers $D$ wie die Quadratwurzel aus $AB$ zu derjenigen aus $AE$. W. z. b. w.

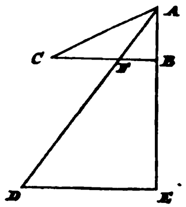


Fig. 18.

## Lehrsatz XI.

*Wenn ein an einem Faden hängender Körper, während das obere Fadenende ruht, durch seine Bewegung horizontale ungleiche Kreise beschreibt, so verhalten sich die Umlaufszeiten auf diesen Kreisen wie die Quadratwurzeln aus den Sinus der Winkel, unter denen der Faden zur Horizontalebene geneigt ist.*

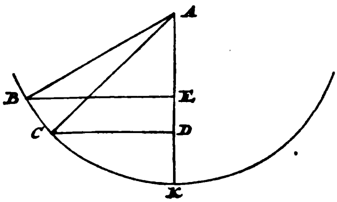


Fig. 19.

Der Faden $AB$ sei in $A$ angebunden. Der an ihm herabhängende, horizontal rotirende Körper spanne ihn [**421**] zuerst längs der Geraden $AB$, nachher aber längs der Geraden $AC$. Man ziehe die horizontalparallelen Geraden $BE$ und $CD$, welche die Senkrechte $AD$ in $E$ und $D$ schneiden. Folglich, weil $AB$ und $AC$ gleich sind, bedeutet $AE$ den Sinus des Winkels $ABE$, $AD$ aber den Sinus des Winkels $ACD$. Ich behaupte, dass sich die Zeiten der Umläufe durch die Kreise, deren Radien $BE$ und $CD$ sind, verhalten wie die Quadratwurzeln aus $AE$ und $AD$. Dies folgt offenbar aus dem vorhergehenden Lehrsatz.

## Lehrsatz XII.

*Wenn ein sich kegelförmig bewegendes Pendel minimale Umläufe macht, so verhält sich die Umlaufszeit zur Zeit des*

*senkrechten Falls aus der doppelten Höhe des Pendels wie die Kreisperipherie zum Durchmesser: und deswegen ist sie der Zeit zweier minimaler Seitenschwingungen desselben Pendels gleich.*

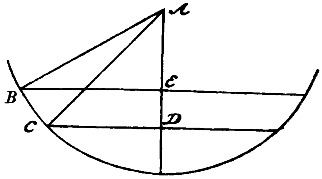


Fig. 20.

Der Faden $AC$ sei bei $A$ befestigt. An ihm hänge ein Körper, welcher rotirend den horizontalen Kreis beschreibt, dessen Radius $DC$ gleich $DA$ ist, so dass der Winkel $CAD$ einen halben Rechten beträgt. Dann ist die Centrifugalkraft in $C$ gleich der Schwere des Körpers (Hilfssatz I); daher durchläuft dieser den mit dem Radius $DC$ beschriebenen Kreis mit derjenigen Geschwindigkeit, welche er durch den senkrechten Fall von der halben Höhe von $DC$ oder $DA$ erlangen würde (Lehrsatz V). Es verhält sich aber $DC$ zu $CA$ wie 1 zu $\sqrt{2}$, daher verhält sich die Zeit des senkrechten Falls aus der halben Höhe $DC$ zur Zeit des senkrechten Falls aus der halben Höhe $CA$, Zeiten, welche sich wie die Quadratwurzeln aus $DC$ und $CA$ verhalten, wie 1 zu $\sqrt{\sqrt{2}}$. Folglich verhält sich die Zeit des senkrechten Falls aus der halben Höhe $DC$ zur Zeit, in welcher ein Körper aus der doppelten Höhe $CA$ fällt, welche das Doppelte der Fallzeit auf der halben Höhe $AC$ beträgt, [**422**] wie 1 zu $2\sqrt{\sqrt{2}}$ oder wie ein beliebiger Radius $r$ zum Doppelten von $r\sqrt{\sqrt{2}}$. — Es verhält sich die Zeit des senkrechten Falles aus der halben Höhe $DC$ zur Zeit der Umkreisung der mit dem Radius $DC$ beschriebenen Peripherie, wie der Radius zur Peripherie. Aber die Zeit der Umkreisung der Peripherie (mit dem Radius $DC$) verhält sich zur Zeit eines minimalen Umlaufes wie die Quadratwurzel aus $AD$ zu der aus $AC$ (Lehrsatz X) oder wie 1 zu $\sqrt{\sqrt{2}}$; also die Zeit des senkrechten Falls aus der halben Höhe $DC$ verhält sich zur Zeit eines minimalen Umlaufs wie der Radius zu $\sqrt{\sqrt{2}}$ mal der Peripherie; mithin verhält sich die Zeit eines minimalen Umlaufes des Pendels $AC$ zur Zeit des senkrechten Falls aus der doppelten Höhe des Pendels wie $\sqrt{\sqrt{2}}$ mal der Peripherie zum Doppelten von $\sqrt{\sqrt{2}}$ mal dem Radius oder wie die Peripherie

zum Durchmesser. Da nun die Zeit einer minimalen seitlichen Schwingung des Pendels $AC$ sich zur Zeit des senkrechten Falls aus der halben Höhe $AC$ oder, wenn wir beides mit zwei multipliciren, die Zeit zweier minimaler seitlicher Schwingungen des Pendels $AC$ zur Zeit des Falls aus der Höhe $2AC$ sich auch wie die Peripherie zum Durchmesser verhält, so verhält sich die Zeit eines minimalen Umlaufs des Pendels $AC$ zur Zeit des senkrechten Falls aus der doppelten Höhe des Pendels $AC$, wie die Zeit zweier minimaler seitlicher Schwingungen des Pendels $AC$ zur Zeit des senkrechten Falls aus dem Doppelten von $AC$. Folglich ist die Zeit eines minimalen Umlaufs des Pendels $AC$ gleich der Zeit zweier minimaler seitlicher Schwingungen eben dieses Pendels $AC$. W. z. b. w. [**423**].

## Lehrsatz XIII.[26])

*Wenn ein Körper auf einem Kreise rotirt und jeden der Umläufe in derselben Zeit vollendet, in welcher ein Pendel von der Länge des Halbmessers jenes Kreises in konischer Bewegung einen minimalen Umlauf oder zwei minimale Seitenschwingungen vollenden würde, so hat er eine seinem Gewicht gleiche Centrifugalkraft.*

Der Faden $AC$ (s. Fig. 20) sei gleich dem Radius des Kreises, worauf der Körper rotirt; Winkel $CAD$ soll einen halben Rechten betragen. Ist die Umlaufszeit um den Kreis mit Radius $CD$ gleich 1, so ist die Zeit eines minimalen Umlaufs desselben Pendels gleich $\sqrt{\sqrt{2}}$ (Lehrsatz XI). Nach der Voraussetzung ist dieser letzteren die Umlaufszeit auf dem Kreise gleich, dessen Radius $AC$ ist; folglich verhält sich die Umlaufszeit um den Kreis mit dem Radius $CD$ zur Umlaufszeit um den mit Radius $AC$ wie 1 zu $\sqrt{\sqrt{2}}$ oder wie $\sqrt{CD}$ zu $\sqrt{AC}$. Nach Umkehrung von Lehrsatz IV haben also diese beiden Körper mit dieser Umdrehung gleiche Centrifugalkraft, und da auf $CD$ die Centrifugalkraft gleich der Schwerkraft ist, so ist dasselbe der Fall bei der Rotation auf dem Kreise mit dem Radius $AC$. W. z. b. w.

## Lehrsatz XIV.[27])

*Die Umlaufszeit eines beliebigen kegelförmig bewegten Pendels ist gleich der Zeit des senkrechten Falls aus der Höhe gleich dem Pendelfaden, wenn der Neigungswinkel des Fadens gegen die*

*Horizontalebene ungefähr $2^\circ 54'$ beträgt. Genau jedoch, wenn sich der Sinus des besagten Winkels zum Radius wie das dem Kreise einbeschriebene Quadrat zum Quadrat aus dessen Umfange verhält.*

Es sei $AD = DC = a$; $AE = b$; die Peripherie verhalte sich zum Radius wie $c$ zu $r$ (siehe Figur 20); die Zeit des senkrechten Falls durch [**424**] die Hälfte von $CD$ sei $= 1$, demnach ist die Zeit des Falls durch die Hälfte von $AC$ gleich $\sqrt{\sqrt{2}}$. Nun verhält sich die Fallzeit durch die Hälfte von $AC$ zur Fallzeit durch $AC$ wie 1 zu $\sqrt{2}$, also ist die Fallzeit durch $AC$ gleich $\sqrt{\sqrt{8}}$. Die Zeit des Umlaufs um den Kreis mit Radius $CD$ verhält sich zur Fallzeit durch die halbe Höhe $CD$ wie $c$ zu $r$. Die Umlaufszeit um den Kreis mit Radius $CD$ ist also $= \frac{c}{r}$. Die Umlaufszeit für $C$ verhält sich zur Umlaufszeit für einen beliebigen Punkt $B$ wie die Quadratwurzeln aus $AD$ und $AE$ d. h. wie $\sqrt{a}$ zu $\sqrt{b}$. Mithin ist für $B$ die Umlaufszeit $= \frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}}$; wenn man nun annimmt, dass sich $AE$, der Sinus des Winkels $ABE$, zum Radius $AB$ verhält wie das Quadrat, welches dem Kreise einbeschrieben ist, zum Quadrat aus dem Umfang des Kreises, so ist $b$ zu $a\sqrt{2}$ wie $2rr$ zu $cc$, d. h. $\frac{bcc}{arr} = 2\sqrt{2}$ oder $\frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\sqrt{8}}$. Da nun $\frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}}$ die Umlaufszeit für $B$ und $\sqrt{\sqrt{8}}$ die Fallzeit durch $AC$ ist, so ist diese Umlaufszeit für $B$ gleich der Zeit des senkrechten Falls aus der Höhe gleich der Länge des Pendelfadens.

Da sich aber $2r$ zu $c$ wie 7 zu 22 verhält, so verhält sich $4rr$ zu $cc$ wie 49 zu 484; also $2rr$ verhält sich zu $cc$ wie 49 zu 968. Hieraus ergiebt sich: wie 968 zu 49, so verhält sich der Radius $a\sqrt{2}$ zu $b$ oder 100000 : 5062 oder der Radius zum Sinus des Winkel $2^\circ 54'$. W. z. b. w.

## Lehrsatz XV.

*Wenn zwei Pendel von gleichem Gewichte, aber ungleichen Fadenlängen, sich kegelförmig bewegen, und wenn die Höhen der Kegel gleich sind, so verhalten sich die Kräfte, mit denen sie ihre Fäden spannen, wie die Fadenlängen.*

$AB$ und $AC$ seien zwei Pendel von verschiedener Länge, an deren Enden $B$ und $C$ zwei gleiche Gewichte aufgehängt sind, die um die gemeinsame Axe $AD$ rotiren. Ich behaupte [**425**], die Kraft, welche den Faden $AB$ spannt, verhält sich zur Kraft, welche an dem Faden $AC$ zieht, wie der Faden $AB$ zum Faden $AC$. Wenn wir uns nämlich denken, dass das Gewicht $B$ in dieser Lage von einer Kraft in $A$, die an dem Faden zieht, und von einer anderen Kraft in $G$, der Centrifugalkraft gleich, in der Richtung der Geraden $BG$ ziehend, gehalten werde, so ist in der Mechanik festgestellt, dass nach Errichtung der Senkrechten $BH$ und nach Zeichnung der Wagerechten $HL$, die in $A$ den Faden $AB$ ziehende Kraft sich zum Gewicht $B$ wie $LB$ zu $BH$ verhält, oder wie $AB$ zu $AD$. Ebenso verhält sich die Kraft, mit welcher der Faden $CA$ gezogen wird, zum Gewicht $C$, oder zum Gewicht $B$, welches $C$ gleich sein soll, wie $AC$ zu $AD$. Folglich verhält sich die Kraft, welche beim Rotiren den Faden $AB$ spannt, zur Kraft, welche den Faden $AC$ spannt, wie $AB$ zu $AC$. W. z. b. w.

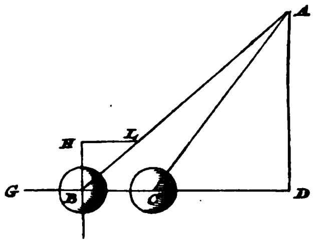


Fig. 21.

## Lehrsatz XVI.[28])

*Wenn ein* e i n f a c h e s *Pendel die grösste seitliche Schwingung vollführt, d. h. wenn es durch den ganzen Quadranten des Kreises fällt, so zieht es bei der Ankunft im untersten Punkte des Kreises mit dreifach grösserer Kraft an seinem Faden, als wenn es ruhend an ihm aufgehängt wäre.*

Wenn die Kugel $C$, die mit $A$ durch den Faden $AC$ verbunden ist, durch den Quadranten des Kreises $CB$ herabfällt, so zieht sie nach ihrer Ankunft in $B$ mit dreifach grösserer Kraft an dem Faden $AB$, als wenn sie mit ihrem einfachen Gewichte aufgehängt wäre. Erstens ist nämlich die Geschwindigkeit, mit welcher sie fortfahren würde, sich längs der Geraden $BD$ zu bewegen, wenn sie bei $B$ den Faden verliesse, dieselbe, welche sie im Punkte $F$ besitzen würde, wenn sie senkrecht durch $CF$ gefallen wäre. Dort würde sie nun eine solche Geschwindigkeit erlangt haben, dass sie mit ihr

das Doppelte der Strecke $CF$ durchlaufen würde, d. h. gleichförmig bewegt und in gleicher Zeit, in welcher sie von $C$ bis $F$ gefallen wäre. Folglich hat die Kugel in $B$ den Antrieb, die Strecke $BD$, das Doppelte von $AB$, in der gleichen Zeit zu durcheilen, in welcher sie von $A$ [**426**] bis $B$ fallen würde. Hierbei ist freilich die Schwerkraft unberücksichtigt gelassen, wonach sie inzwischen nach unten fallen und eine Parabel beschreiben würde. $BGE$ sei eine Parabel, deren Halbparameter $AB$, deren Scheitel $B$ heisse. Da also die Fortbewegung der Kugel bei $B$ von dem Kreise $BC$, solange sie auf der Geraden $BD$ mit gleichförmiger Bewegung dahineilt,

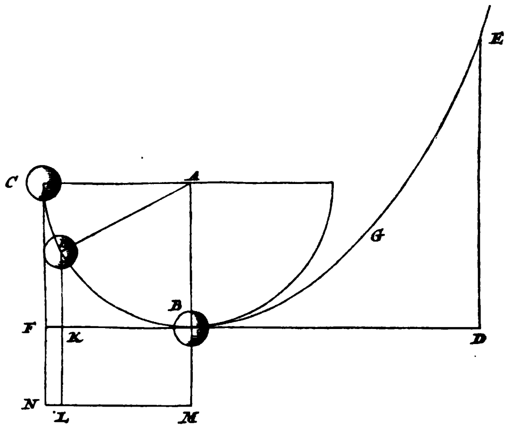



Fig. 22.

anfangs, nahe bei $B$, für identisch angesehen wird mit der Fortbewegung von der Parabel $BGE$, so ergiebt sich, dass die Centrifugalkraft, welche die Kugel bei $B$ nur vom Umschwunge her hat, ein Antrieb ist, sich vom Mittelpunkte $A$ oder von der Kreisperipherie $BC$ in beschleunigter Bewegung gemäss den Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. zu entfernen, und demnach dem Antriebe ähnlich ist, nach welchem die Körper zu fallen streben, den wir Schwere nennen. Dieser Antrieb in der Kugel $B$ ist nun so gross, wie derjenige eines ihr gleichen Körpers, welcher mit beschleunigter Bewegung die Strecke $DE$ zurücklegen will, in derselben Zeit, in welcher er mit gleichförmiger Bewegung die Strecke $BD$

zurücklegen würde, d. h. in derselben Zeit, in welcher die Kugel mit ebenfalls beschleunigter Bewegung von $A$ bis $B$ fallen würde. Weil nun $DE$ das Doppelte von $BA$ beträgt, so ist die Centrifugalkraft der Kugel in $B$ gleich dem Zweifachen ihrer Schwere. Aber hier kommt noch ein neuer Antrieb von der Schwere hinzu, wonach die Kugel $B$ in der gleichen Zeit, in welcher sie von $A$ bis $B$ fallen würde, auch jetzt eine ebenso grosse Strecke mit natürlich beschleunigter Bewegung nach unten zurückzulegen strebt. Mithin will sie durch beide Antriebe zusammen mit beschleunigter Bewegung gemäss 1, 3, 5, 7 die Strecke $DE + AB$, d. h. gleich dem Dreifachen von $AB$ zurücklegen, und daher beträgt auch die Kraft, mit welcher sie im Punkte $B$ nach dem Fall von $C$ zieht, das Dreifache derjenigen, welche von der einfachen Schwere der freihängenden Kugel $B$ herrührt. Dies stimmt denn auch genau mit der Erfahrung überein.

Wenn ich zu wissen wünsche, mit welcher Kraft der Faden $AB$ gezogen wird, wenn die Kugel durch den Bogen $HB$ fällt, so mache ich $FN$ der Hälfte von $AB$ gleich und zeichne das Rechteck $BFNM$. $HL$ werde parallel $AB$ gezogen. Ich behaupte, die gesuchte Zugkraft verhält sich zum einfachen Gewicht der herabhängenden Kugel wie $HL$ zu $LK$. Wenn danach $BH$ der sechste Teil [**427**] der Peripherie ist, so ist jene Kraft das Doppelte dieses Gewichts, und daher bedarf es der doppelten Fadenstärke, um die Kraft dieses Zuges auszuhalten, als derjenigen, womit die ruhend aufgehängte Kugel getragen werden kann. U. s. w.

## Lehrsatz XVII.[29])

*Eine vom Mittelpunkte eines vertical stehenden Kreises an einem Faden herabhängende Kugel vermag auf der Peripherie jenes Kreises nicht zu rotiren, falls nicht der Faden das Sechsfache des angehängten Gewichtes zu tragen im Stande ist.*

Der senkrecht zur Horizontalebene stehende Kreis sei $BCDE$, von dessen Mittelpunkt $A$ die Kugel $B$ herabhängt. Ich behaupte, zur Rotation auf der Peripherie $BCDE$ ist ein Faden erforderlich, der die Anhängung des sechsfachen Gewichtes von $B$ ertragen kann. Damit nämlich der Faden gestreckt bleibe, wenn die Kugel den Punkt $D$ passiert und durch den Bogen $DE$ fällt, muss die Geschwindigkeit der Kugel dort so sein, dass sie, würde sie abgelöst, die Parabel $DF$,

deren halber Parameter $AD$ ist, beschreiben würde. Also ist für sie dieselbe Geschwindigkeit nothwendig, die sie in $D$ besitzen würde nach dem Falle von $HD$, einer der Hälfte von $DA$ gleichen Höhe. Damit sie also beim Ansteigen von $B$ durch den Halbkreis $BCD$ besagte Geschwindigkeit in $D$ übrig habe, muss die Geschwindigkeit in $B$ so gross sein, dass sie zur senkrechten Erhebung bis zum Punkte $H$ genügt. Mit dieser Geschwindigkeit in $B$ wird die Kugel, auf welchem Wege sie auch bis zur Höhe $D$ gelangt, immer so viel Geschwindigkeit behalten, um dann senkrecht oder auf einem beliebigen Wege bis $H$ zu steigen, d. h. sie hat so viel Geschwindigkeit übrig, wie sie beim Fall aus der Höhe $HD$ erwerben würde, und deren sie bei $D$, wie gesagt, bedarf. Die Geschwindigkeit ferner, mit welcher sie senkrecht von $B$ bis $H$ steigen könnte, oder die sie beim Falle durch $HB$ erhielte, verhält sich zur Geschwindigkeit [**428**], welche sie beim Falle durch $AB$ erlangte, wie die Quadratwurzeln dieser Strecken, d. h. wie $\sqrt{10}$ zu 2. Nun ist im Vorhergehenden gezeigt, dass die Centrifugalkraft allein das Doppelte des einfachen Gewichts der Kugel beträgt, wenn sie auf dem Kreise mit derjenigen Geschwindigkeit rotirt, welche sie durch den Fall von der Höhe $AB$ oder durch den Bogen $EB$ erlangt. Die Geschwindigkeit, mit der sie hier auf demselben Kreise rotirt, verhält sich zu jener wie $\sqrt{10}$ zu 2, und demnach stehen die Centrifugalkräfte zu einander im quadratischen Verhältnisse, d. h. wie 10 zu 4 oder wie 5 zu 2 (Lehrsatz II). Also verhält sich hier die Centrifugalkraft zur Schwere der Kugel wie 5 zu 1. Zu dieser Centrifugalkraft ist hinzuzuzählen, wenn die Kugel $B$ passiert, die Schwerkraft, womit sie nach unten strebt, welche sich, wie erörtert wurde, zur besagten Centrifugalkraft wie 1 zu 5 verhält. Also die ganze Kraft, oder Spannung, welche der Faden beim Durchgange

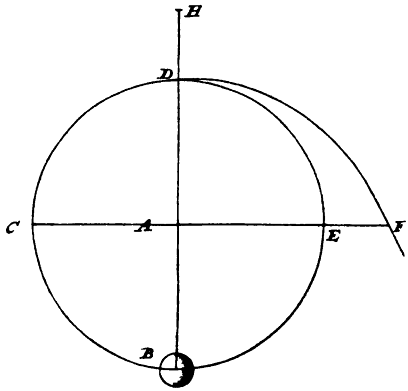


Fig. 23.

der Kugel durch $B$ aushält, beträgt das Sechsfache der Schwere der Kugel.

Hieraus finde ich: wenn die am Faden $AB$ befestigte Kugel bei $C$ losgelassen wird, von derselben Höhe wie Punkt $A$, und wenn $AB$ in $D$ so geteilt wird, dass $DB = \frac{2}{5}AB$ ist, und wenn in $D$ ein Nagel befestigt wird, der den Faden aufhält beim Falle der Kugel von $C$, so kann die Kugel um den Nagel herumrollen und einen Kreis beschreiben. Wenn aber der Nagel höher als bei $D$ eingeschlagen wird, kann sie es nicht. Denn da sich die Geschwindigkeit der Kugel bei $B$ für die vollständige, unbehinderte Umkreisung zur Geschwindigkeit, welche sie durch den Fall von der Höhe $DB$ erlangen würde, wie $\sqrt{10}$ zu 2 verhält (nach obiger Auseinandersetzung): so müssen die Höhen, von denen fallend sie diese beiden verschiedenen Geschwindigkeiten erlangen würde, im quadratischen Verhältniss hiervon zu einander stehen, nämlich wie 10 zu 4 oder wie 5 zu 2. Also verhält sich $AB$ zu $DB$ wie 5 zu 2.

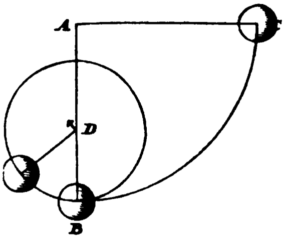


Fig. 24.

# Anmerkungen.

Eine kurze Biographie des grossen holländischen Mathematikers und Physikers ist in Nr. 20 dieser Klassikerausgabe enthalten (*Huygens'* Abhandlung über das Licht, herausgegeben von *E. Lommel*). Einige Data im Folgenden sind entnommen aus: *J. Bosscha*, »*Christian Huygens*, Rede am 200. Gedächtnisstage seines Lebensendes«, übersetzt von Engelmann (Leipzig, 1895). Ueber die *Huygens*'schen Leistungen in der Mechanik, mit besonderer Rücksicht auf die hier vorliegenden beiden Arbeiten, verweisen wir auf *E. Dühring*, »Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik« (3. Aufl., Leipzig, 1887; Nr. 53—59, 70—72) und *E. Mach*, »Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt« (4. Aufl., Leipzig, 1901, S. 157 ff. und 344 ff.)

Der vorliegenden Uebersetzung, die bis auf einige nothwendige Aenderungen von Baron *Cay von Brockdorff* herrührt, lag die von *Burcherus de Volder* und *Bernhardus Fullenius* veranstaltete Ausgabe der Opuscula postuma (Lugduni Batavorum, 1703) zu Grunde.

## Ueber die Bewegung der Körper durch den Stoss.

1) *Zu S. 3.* Die erste Veröffentlichung seiner Stossgesetze gab *Huygens* im Jahre 1669, und zwar in den Philosophical Transactions (The laws of motion on the collision of bodies) und im Journal des Savants (Règles du mouvement dans la rencontre des corps). Die zuerst genannte Publication ist durch die Londoner Royal Society angeregt; kurz zuvor (Ende 1668) hatten *Wallis* und *Wren* derselben Gesellschaft ihre Stossgesetze vorgelegt. Aber die Arbeit von *Wallis* bezieht sich auf den Stoss unelastischer Körper; während *Wren*, der wie *Huygens* den Fall vollkommen elastischer Körper behandelt und zu

denselben Regeln gelangt, nachträglich zugab, seine Sätze nicht beweisen zu können. Uebrigens hatte *Huygens* bereits ein Jahr früher diese Stossgesetze in der Pariser Academie vorgetragen, und ihre Auffindung muss noch viel weiter zurückliegen, denn in einem Briefe an *Claude Mylon* vom 6. Juli 1656 wird die Vermehrung der Stosswirkung durch Einschaltung eines mittleren Körpers (vgl. Lehrsatz XII) erwähnt. Die ausführliche Ableitung der Stossgesetze, also die Begründung der 1669 ohne Beweis gegebenen Resultate, findet sich erst in dem 1703 posthum erschienenen Tractatus de motu corporum ex percussione, dessen deutsche Uebersetzung dem Leser vorliegt.

2) *Zu Voraussetzung II, S. 3.* Voraussetzung der vollkommenen Elasticität.

3) *Zu Voraussetzung III, S. 3.* Dieses Axiom der relativen Bewegung und seine consequente Verwerthung ist neben dem späteren Schwerpunktsaxiom (vgl. Anm. 11) der bedeutendste Gedanke der vorliegenden Schrift. Die Illustration durch ein fahrendes Schiff ist so alt wie die Vorstellung der relativen Bewegung überhaupt. Dass bei *Huygens* auch noch der Schiffer und der Mann am Ufer einander die Hände reichen, darin darf man wohl (mit *Dühring*) eine »Handgreiflichkeit« sehen, »die für eine erste Darstellung ihren guten Sinn hatte, heute aber nur der Schärfe und Allgemeinheit des Gedankenausdrucks durch gleichgültiges Nebenwerk Eintrag thut«.

Wir wollen durchgängig die Geschwindigkeiten der Körper vor dem Stoss mit $u_1$, $u_2$, die nach dem Stoss mit $v_1$, $v_2$ bezeichnen, so dass der Stoss durch das Schema

$$(1) \qquad u_1, u_2 \,\|\, v_1, v_2$$

dargestellt werden kann. Um aber die von *Huygens* oft so breit durchgeführte Untersuchung aller möglichen Specialfälle entbehrlich zu machen, rechnen wir, wie heute üblich, die Geschwindigkeiten in der einen Richtung (z. B. von links nach rechts) positiv, in der entgegengesetzten negativ. — Hiernach besagt Voraussetzung III, dass die massgebenden Geschwindigkeiten relative Geschwindigkeiten sind und nur ihre gegenseitigen Differenzen in Betracht kommen, dass man also beiden Körpern eine beliebige gemeinsame Geschwindigkeit $c$ ertheilen und aus dem Stosse (1) unendlich viele andere, nämlich

$$(2) \qquad c + u_1, c + u_2 \,\|\, c + v_1, c + v_2$$

ableiten kann.

4) *Zu Lehrsatz I, S. 4.* In Voraussetzung II wurde für gleiche Körper die Möglichkeit des Stosses

(3) $$+a,\ -a \parallel -a,\ +a$$

postulirt. Addirt man hierzu die gemeinsame Geschwindigkeit $a$, so ergiebt sich der Stoss

$$2a,\ 0 \parallel 0,\ 2a,$$

also die Uebertragung der Geschwindigkeit vom stossenden auf den ruhenden Körper.

5) *Zu Lehrsatz II, S. 6.* Addirt man zu (3) die gemeinsame Geschwindigkeit $c$ und setzt $c+a = u_1$, $c-a = u_2$, so ergiebt sich das Stossschema

$$u_1,\ u_2 \parallel u_2,\ u_1,$$

also Vertauschung der Geschwindigkeiten.

6) *Zu Voraussetzung V, S. 9.* Die Annahme, dass der Körper 1 seine Geschwindigkeit bewahrt habe, lässt sich zunächst auf zwei Weisen, $v_1 = \pm u_1$, deuten. Aber im Falle $v_1 = u_1$ würde gar kein Stoss stattgefunden haben; es ist also $v_1 = -u_1$ gemeint, d. h. der Körper prallt mit seiner Anfangsgeschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung zurück. Voraussetzung V sagt also: wenn $v_1 = -u_1$, so ist auch $v_2 = -u_2$, oder sie behauptet, für beliebige Körper gleicher oder ungleicher Masse, die Möglichkeit des Stosses

(4) $$a_1,\ a_2 \parallel -a_1,\ -a_2.$$

Die Bedingung, unter welcher $v_1 = -u_1$ sein kann und muss, wird aber erst im Lehrsatz VIII abgeleitet.

7) *Zu Lehrsatz IV, S. 9.* Der Gedanke des Beweises ist einfach folgender. Man addire zu den Stossgeschwindigkeiten (4) die beliebige gemeinsame Geschwindigkeit $c$, so ergiebt sich der Stoss

(5) $$c+a_1,\ c+a_2 \parallel c-a_1,\ c-a_2.$$

Setzt man

(6) $$u_1 = c+a_1,\ u_2 = c+a_2,\ v_1 = c-a_1,\ v_2 = c-a_2,$$

so folgt

(7) $$u_2 - u_1 = v_1 - v_2,$$

die relative Anfangsgeschwindigkeit von 2 gegen 1 ist gleich der relativen Endgeschwindigkeit von 1 gegen 2. Dies ist die erste allgemeingültige Stossregel.

8) *Zu Lehrsatz V, S. 12.* Die Umkehrbarkeit des Stossvorgangs ist characteristisch für den elastischen Stoss, während der Stoss unelastischer Körper als energiezerstreuender, »dissipativer« Vorgang (vgl. Anm. 12) irreversibel ist. Addirt man zu (4) die gemeinsame Geschwindigkeit $-c$, so erhält man wegen (6) den Stoss

$$-v_1, \; -v_2 \; \| \; -u_1, \; -u_2,$$

also die Umkehrung des Stosses (1).

9) *Zu Lehrsatz VI, S. 13.* Es ist zu bedauern, dass dieser Satz nicht die präcisere Fassung aus dem Journal des Savants behalten hat. Es heisst dort in Nr. 5:

*Die Bewegungsgrösse zweier Körper kann durch ihren Stoss wachsen oder abnehmen; aber nach derselben Seite gerechnet bleibt sie immer dieselbe, indem man nämlich die Quantität der entgegengesetzten Bewegung subtrahirt.*

Versteht man unter Bewegungsgrösse (Bewegungsmoment, quantitas motus) das Product aus Masse und absoluter Geschwindigkeit, ohne Rücksicht auf deren Vorzeichen oder Richtung, und unter Bewegungsgrösse eines Massensystems die (arithmetische) Summe der Bewegungsgrössen seiner einzelnen Massen, so wird diese Bewegungsgrösse beim Stoss im Allgemeinen geändert. Hiermit polemisirt also *Huygens* erfolgreich gegen *Descartes*, der sogar die Bewegungsgrösse des Weltalls als unveränderlich erklärt hatte. Diese Bewegungsgrösse im Cartesianischen Sinne hat nach Entdeckung der Erhaltung der Energie durch *Huygens* (vgl. Lehrsatz XI) und *Leibniz* ihre Bedeutung eingebüsst. Dagegen ist eine andere Bewegungsgrösse von mechanischer Wichtigkeit: die Resultante (geometrische Summe) der mit den Massen multiplicirten Geschwindigkeitsvectoren, und hier, im Speciellen, die (algebraische) Summe der mit richtigen Vorzeichen genommenen Producte aus Masse und Geschwindigkeit. In diesem Sinne bleibt die Bewegungsgrösse auch beim Stoss erhalten, d. h. es ist $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ (vgl. Anm. 13).

10) *Zu S. 14.* Diese Fassung ist ungenau, denn beim Stoss gleicher Körper würde ja die ganze Geschwindigkeit $BA$ auf den Körper $A$ übergehen, und $B$ zur Ruhe kommen.

11) *Zu S. 15.* Es ist klar, dass die bisherige Ueberlegung nicht über die eine Gleichung (7) hinausführen kann, und dass *Huygens*, um zu einer zweiten Beziehung zwischen den Anfangs- und Endgeschwindigkeiten zu gelangen, weiterer

Voraussetzungen bedarf, in denen auch die Massen $m_1 m_2$ der stossenden Körper eine Rolle spielen. Diese Voraussetzungen sind nicht, wie die früheren, ausdrücklich aufgezählt, sondern in den Beweis des Lehrsatzes VIII hineinverflochten; man kann sie folgendermassen formuliren:

a) Das Quadrat der Endgeschwindigkeit eines fallenden Körpers ist der Fallhöhe proportional und stets dasselbe, gleichviel ob der Körper frei (vertical) oder auf einer schiefen Ebene oder auf einer Fläche mit stetiger Richtungsänderung fällt, gleichviel also, ob die Endgeschwindigkeit vertical oder schräg oder horizontal gerichtet ist. Ist also $h$ die Fallhöhe, $u$ die Endgeschwindigkeit, so ist $u^2 : h$ constant $= 2g$, $u^2 = 2gh$, wobei (was hier gleichgültig ist) $g$ die Beschleunigung durch die Schwere bedeutet.

b) Die durch Fall von der Höhe $h$ erlangte Geschwindigkeit vermag den Körper wiederum zur Höhe $h$ hinaufzutreiben.

c) Ein nur der Schwerkraft überlassenes System kann aus dem Ruhezustande keine Bewegung ausführen, bei der sein Schwerpunkt steigen würde.

a) b) sind den *Galilei*'schen Fallgesetzen entlehnt. Das Schwerpunktsaxiom c), das eine lebhafte Controverse unter den Zeitgenossen hervorrief, ist einer von *Huygens*' fruchtbarsten Gedanken; in seinem berühmten Werk über die Pendeluhr (Horologium oscillatorium, Paris 1673) gründet er darauf die Theorie des Schwingungsmittelpunktes beim physischen Pendel. Er bemerkt die Anwendbarkeit dieses Princips auf beliebige Systeme, auch flüssige Körper, und deutet auf die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile hin.

Die Einführung der Massen war die eigentliche Schwierigkeit bei der Stosstheorie. Es ist interessant zu sehen, wie *Huygens*' beide Zeitgenossen diese Verlegenheit überwinden. *Wallis* nimmt die Bewegungsgrösse direct zum Ausgangspunkt; sie ist das, was beim Stoss vom einen Körper auf den anderen übergeht und im Ganzen erhalten bleibt. *Wren* erklärt, dass die den Massen umgekehrt proportionalen Geschwindigkeiten die »eigentlichen und natürlichsten Geschwindigkeiten« der Körper (velocitates propriae et maxime naturales) seien und daher beim Stoss erhalten bleiben, während ein davon abweichendes »ungehöriges« Geschwindigkeitsverhältniss in ein im entgegengesetzten Sinne abweichendes übergehe: ähnlich den abwechselnden Ausschlägen einer Wage. Dass eine solche Verschleierung der Schwierigkeit einem Denker wie *Huygens* nicht genügte, versteht sich von selbst.

12) *Zu Lehrsatz VIII, S. 16. Huygens'* Beweis lässt sich in Kürze so wiedergeben. Die Anfangsgeschwindigkeiten $u_1$, $u_2$ der beiden Massen $m_1$, $m_2$ mögen durch Fall von den Höhen $h_1$, $h_2$ erworben worden sein; dann ist $u_1^2 = 2gh_1$, $u_2^2 = 2gh_2$, und der Schwerpunkt beider Körper befand sich ursprünglich in der Höhe

$$h = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2}{2g(m_1 + m_2)}.$$

Die Geschwindigkeiten $v_1$, $v_2$ nach dem Stoss mögen umgekehrt dazu verwendet werden, die Massen in die Höhen $k_1$, $k_2$ hinaufzutreiben; dann ist $v_1^2 = 2gk_1$, $v_2^2 = 2gk_2$, und der Schwerpunkt des Systems erlangt dadurch die Höhe

$$k = \frac{m_1 k_1 + m_2 k_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2g(m_1 + m_2)}.$$

Gemäss dem Schwerpunktsaxiom c) darf dann $k$ nicht grösser als $h$ sein; $h \geqq k$.

Wenn wir für einen Augenblick den *Huygens*'schen Gedankengang verlassen, so würden wir nun einfach folgendermassen weiter schliessen. Denken wir uns (nach Lehrsatz V) den Stoss umgekehrt, so würde aus demselben Grunde c) $h$ nicht grösser als $k$ sein dürfen; es bleibt also nur $h = k$ übrig, oder

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2. \tag{8}$$

Das ist also nichts anderes als der Inhalt des späteren Lehrsatzes XI, die Erhaltung der »lebendigen Kraft« oder der kinetischen Energie; die beiden Seiten von (8) stellen die doppelte Energie beider Körper vor und nach dem Stoss dar. Der elastische Stoss ist also ein »conservativer« Vorgang, während mit dem unelastischen ein (durch Wärmeentwicklung compensirter) Verlust an kinetischer Energie verbunden ist.

Der *Huygens*'sche Beweis des Satzes VIII benutzt noch nicht die Gleichung (8), sondern bleibt bei der gefundenen Ungleichung $h \geqq k$ oder

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \geqq m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \tag{9}$$

stehen. Nun wird der besondere Fall betrachtet, dass die Geschwindigkeiten der aufeinander zueilenden Körper sich umgekehrt wie die Massen verhalten, also $m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$, und es wird behauptet, dass in diesem Falle $v_1 = -u_1$, $v_2 = -u_2$ sei. Der Beweis, der im Original geometrisch gehalten und

wegen der Prüfung der möglichen Einzelfälle recht umfangreich geworden ist, kommt auf folgendes hinaus. Angenommen, es sei nicht $v_1 = -u_1$, sondern $v_1 = -u_1 + x$, so ist nach (7) (Lehrsatz IV) auch $v_2 = -u_2 + x$; dann folgt aber

$$\begin{aligned} m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 - 2x(m_1 u_1 + m_2 u_2) + (m_1 + m_2)x^2 \\ &= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 + (m_1 + m_2)x^2 \\ &\geqq m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (9); also bleibt nur $x = 0$ übrig.

Damit ist als Bedingung des Stosses (4) das Bestehen der Relation

$$(10) \qquad m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$$

nachgewiesen.

13) *Zu Lehrsatz IX, S. 22.* Der allgemeine Fall wird auf den des Satzes VIII wieder durch Hinzufügung einer gemeinsamen Bewegung zurückgeführt. Addirt man zu (4) die Geschwindigkeit $c$, so entsteht (5) oder, mit Einführung von (6), der allgemeine Stoss (1), und hierbei ist wegen (10)

$$(11) \quad \begin{cases} m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2)c + m_1 a_1 + m_2 a_2 = (m_1 + m_2)c, \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)c - m_1 a_1 - m_2 a_2 = (m_1 + m_2)c, \end{cases}$$

$$(12) \qquad m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Hiermit ist die Erhaltung der Bewegungsgrösse (aber nicht im Cartesischen Sinne, vgl. Anm. 9) oder die Erhaltung der Geschwindigkeit ($= c$) des Schwerpunkts ausgesprochen; ein Resultat, das zwar nicht in der vorliegenden Arbeit, wohl aber im Journal des Savants ausdrücklich formulirt und als »admirable loi de la Nature« bezeichnet wird. Von den drei Formeln

(7) Erhaltung der relativen Geschwindigkeit
(8) Erhaltung der kinetischen Energie
(12) Erhaltung der Bewegungsgrösse

genügen je zwei zur Bestimmung der Endgeschwindigkeiten; allerdings ist die Bestimmung aus (7) (8) und (12) (8) zweideutig. Benutzt man die linearen Gleichungen (7) (12), so erhält man durch Auflösung die auf S. 24 gegebene Regel:

$$(13) \qquad \begin{cases} v_1 = u_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}(u_2 - u_1) \\[2ex] v_2 = u_2 + \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}(u_1 - u_2). \end{cases}$$

14) *Zu Lehrsatz X, S. 24.* Lassen wir $m_1$ ruhen und $m_2$ mit der Geschwindigkeit $u$ stossen ($u_1 = 0$, $u_2 = u$), so folgt aus (13)

$$v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u .$$

Wenn umgekehrt $m_2$ ruht und $m_1$ mit der Geschwindigkeit $u$ stösst, so empfängt $m_2$ die Geschwindigkeit

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u ,$$

also $v_1 : v_2 = m_2 : m_1$.

15) *Zu Lehrsatz XI, S. 25.* Vgl. Anm. 12.

16) *Zu Lehrsatz XII, S. 29.* Wenn der Körper $m_1$ mit der Geschwindigkeit $u_1$ auf den ruhenden Körper $m_3$ stösst, so empfängt dieser die Geschwindigkeit

$$v_3 = \frac{2m_1}{m_1 + m_3} u_1 .$$

Wenn $m_1$ zuerst den ruhenden Körper $m_2$ stösst und erst dieser mit der erlangten Geschwindigkeit

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

den ruhenden $m_3$ in Bewegung setzt, so empfängt $m_3$ die Geschwindigkeit

$$w_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)} u_1 .$$

Daraus folgt

$$w_3 - v_3 = 2u_1 \frac{m_1(m_1 - m_2)(m_2 - m_3)}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)(m_1 + m_3)} .$$

Wenn also $m_2$ die mittlere Masse hat ($m_1 > m_2 > m_3$ oder $m_1 < m_2 < m_3$), so ist $w_3 > v_3$, die vermittelte Stosswirkung grösser als die directe.

Ferner ist

$$4m_1 \frac{u_1}{w_3} = \frac{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}{m_2} = \frac{m_2^2 + m_1 m_3}{m_2} + m_1 + m_3$$

$$= \frac{(m_2 - \sqrt{m_1 m_3})^2}{m_2} + (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_3})^2 .$$

Das erste Glied ist positiv; sein kleinster Werth 0, der also $4m_1 u_1 : w_3$ zu einem Minimum und $w_3$ zu einem Maximum

macht, wird erreicht für $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$ oder $m_1 : m_2 = m_2 : m_3$; d. h. wenn man zwischen die Massen $m_1$ und $m_3$ ihre »mittlere Proportionale« als vermittelnden Stossübertrager einschaltet.

17) *Zu Lehrsatz XIII, S. 33.* Es seien $m_0 = m$ und $m_n = M$ die beiden äussersten, $m_1 m_2 \dots m_{n-1}$ die eingeschalteten Massen; die Bewegung werde der Reihe nach von $m_0$ auf $m_1$, von $m_1$ auf $m_2$ u. s. w. übertragen. Jede Masse $m_i$ ruhe zunächst, empfange von ihrer Vorgängerin $m_{i-1}$ die Geschwindigkeit $u_i$ und behalte nach dem Stoss mit ihrer Nachfolgerin $m_{i+1}$ die Geschwindigkeit $v_i$ zurück. Für die Massen $m_i$, $m_{i+1}$ lautet dann das Stossschema

$$u_i,\ 0 \mid v_i,\ u_{i+1},$$

und nach (13) wird

$$v_i = u_i \frac{m_i - m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}}, \quad u_{i+1} = u_i \cdot \frac{2 m_i}{m_i + m_{i+1}}.$$

Aus diesen Recursionsformeln hat man der Reihe nach die Geschwindigkeiten zu berechnen. Damit die Geschwindigkeit $U = u_n$ des letzten Körpers (bei gegebener Geschwindigkeit $u = u_0$ des ersten) ein Maximum werde, muss (vgl. Anm. 16) $m_i = \sqrt{m_{i-1} m_{i+1}}$ werden, oder die Massen müssen eine geometrische Reihe bilden, deren Quotient $q$ sei,

$$m_0 : m_1 = m_1 : m_2 = m_2 : m_3 = \cdots = 1 : q,$$
$$m_1 = mq, \quad m_2 = mq^2, \ \dots, \ m_i = mq^i, \ \dots, \ M = mq^n.$$

In diesem Falle wird

$$v_i = u_i \frac{1-q}{1+q}, \quad u_{i+1} = u_i \cdot \frac{2}{1+q},$$

die Geschwindigkeiten $u_i$ bilden eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{2}{1+q}$, und man hat

$$u_1 = u \cdot \frac{2}{1+q}, \quad u_2 = u \cdot \left(\frac{2}{1+q}\right)^2, \ \cdots \ u_i = u \cdot \left(\frac{2}{1+q}\right)^i, \ \cdots$$
$$U = u \cdot \left(\frac{2}{1+q}\right)^n.$$

Die Bewegungsgrösse des letzten Körpers wird

$$MU = mu \cdot \left(\frac{2q}{1+q}\right)^n.$$

Wenn in dem *Huygens*'schen Beispiel von 100 Massen ($n = 99$) die Bewegung vom grössten Körper zum kleinsten übergeht, so ist $q = \frac{1}{2}$ zu setzen, und die Geschwindigkeit des letzten Körpers wird

$$U = u \cdot (\tfrac{4}{3})^{99} = 23385 \cdot 10^8 \cdot u,$$

nicht, wie *Huyghens* angiebt, $14\,760\,000\,000 \cdot u$. Geht umgekehrt die Bewegung vom kleinsten Körper zum grössten über, so ist $q = 2$, und die Bewegungsgrösse des letzten Körpers wird

$$MU = mu \cdot (\tfrac{4}{3})^{99}.$$

Die Bewegungsgrösse aller übrigen Massen muss, weil die gesammte Bewegungsgrösse vor wie nach jedem Stoss $= mu$ ist, den Werth $mu - MU$ haben, den man thatsächlich durch Summation der Reihe $m_0 v_0 + m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_{n-1} v_{n-1}$ leicht erhält: wobei vorausgesetzt ist, dass keine weiteren Zusammenstösse der mit den Geschwindigkeiten $v_i$ zurückprallenden Massen $m_i$ erfolgt seien. Bildet man die Cartesische Bewegungsgrösse, also mit absoluten Werthen der Geschwindigkeiten, so hat man in diesem Falle ($q > 1$, $v_i$ negativ) die Bewegungsgrösse der zurückprallenden Massen $m_0 m_1 \ldots m_{n-1}$ mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen, erhält also statt $mu - MU$ den Werth $MU - mu$ und im Ganzen $MU + (MU - mu) = 2MU - mu$, also im Beispiel

$$mu \cdot [2(\tfrac{4}{3})^{99} - 1] = 4677 \cdot 10^9 \cdot mu,$$

wie *Huygens* angiebt.

Der grösste Werth der Geschwindigkeit $U$ des letzten Körpers würde bei Uebertragung der gesammten Energie des ersten Körpers auf den letzten herauskommen und $U = u\sqrt{m:M}$ sein; man erhält ihn als Grenzwerth, wenn man die Zahl der eingeschalteten Massen unbeschränkt wachsen lässt ($\lim n = \infty$).

---

## Ueber die Centrifugalkraft.

18) *Zu S. 35.* Auch der Tractatus de vi centrifuga ist erst nach dem Tode des Verfassers, in der genannten Leydener Ausgabe der opuscula postuma von 1703, veröffentlicht worden. Einige Sätze über die Centrifugalkraft hat *Huygens* bereits 1669 der Royal Society in Anagrammform bekannt gemacht; und im fünften Theil des Horologium oscillatorium (1673) sind

13 Theoremata de vi centrifuga ohne Beweis mitgetheilt. Die Herausgeber des Tractatus, der in nicht völlig druckfertiger Form vorgefunden wurde, haben sich bei Anordnung und Redaction, soweit es möglich war, an diese Theoremata angeschlossen.

19) *Zu S. 38.* *Huygens* lässt sich auch hier (vgl. Anm. 3) von dem Princip der relativen Bewegung leiten, und es scheint, dass bei dieser Auffassung die Centrifugalkraft frei von den Dunkelheiten bleibt, die ihr verschiedentlich (z. B. von *Hertz*, »Die Principien der Mechanik« S. 7) nachgesagt werden. Es handelt sich um die relative Bewegung der auf der Tangente weiterfliegenden Kugel gegen den auf dem Kreise mit gleicher Geschwindigkeit weiter rotirenden Beobachter: eine scheinbare Bewegung, wie sie also z. B. ein plötzlich schwerelos werdender Körper gegen die Erdoberfläche einschlagen würde. Die Bahn dieser relativen Bewegung ist, wie auf S. 39 gezeigt wird, diejenige Curve, die durch Abwickeln eines Fadens von der Kreisperipherie entsteht, also (Fig. 5) der eine Zweig der Kreisevolvente, die in $B$ den Kreis senkrecht schneidet; der andere Zweig liegt dazu symmetrisch auf der anderen Seite des Radius $AB$, so dass in $B$ eine Spitze entsteht. Für den Anfang dieser relativen Bewegung verhält sich Alles so, als ob der Körper von einer Kraft nach oben gezogen würde, die ihm in der Zeiteinheit die Beschleunigung $\gamma$ zu ertheilen strebt; diese Centrifugalbeschleunigung $\gamma$ ist also die relative Beschleunigung des geradlinig gleichförmig weiterfliegenden Körpers gegen den weiterrotirenden Kreispunkt, folglich (da die absolute Beschleunigung jenes Körpers Null ist) entgegengesetzt gleich der Centripetalbeschleunigung, die den kreisenden Punkt in seiner krummlinigen Bahn erhält. Verhindern wir also den Körper, dieser Centrifugalbeschleunigung zu folgen, und zwingen ihn mitzukreisen, so übt er auf die dazu nöthigen Befestigungen die Centrifugalkraft $m\gamma$ aus (Druck auf die Schienen, Spannung des Fadens u. dgl.), wo $m$ die Masse des kreisenden Körpers bedeutet. Gerade bei der *Huygens*'schen Betrachtung also wird es recht deutlich, dass die Centrifugalkraft keine besondere Naturkraft ist, sondern eine Reaction: was absolut genommen Trägheit oder Beharrung heisst, heisst relativ zur Kreisbahn Centrifugalkraft. Uebrigens ist von der Masse nur an wenigen Stellen (S. 42, 53) die Rede; im Allgemeinen werden Körper gleicher Masse mit einander verglichen, so dass es erlaubt sein wird, diese Masse $=1$

zu setzen und der Kürze wegen von der Centrifugal**kraft** $\gamma$ (statt Centrifugal**beschleunigung**) zu reden.

20) *Zu S. 41.* Folgende Bezeichnungen mögen festgehalten werden:

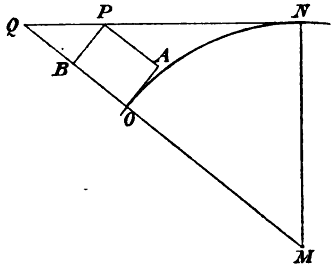



Fig. 25.

$r$ Radius der Kreisbahn,
$v$ (lineare) Geschwindigkeit der gleichförmigen Kreisbewegung,
$\omega = v : r$ Winkelgeschwindigkeit,
$T = 2\pi r : v = 2\pi : \omega$ Umlaufszeit,
$\gamma$ centrifugale Beschleunigung.

Man denke sich in $N$ den kreisenden Körper losgerissen und auf der Tangente $NPQ$ weiterfliegend; in der Zeit $t$, in der $N$ weiterrotirend den Bogen $NO = vt$ beschreibt, durchläuft jener die geradlinige Strecke $NP = vt$. Es seien $A$, $B$ die Projectionen von $P$ auf die Tangente und den Radius im Punkte $O$, so dass

$$x = OA = BP, \quad y = OB = AP$$

die Coordinaten des losgerissenen Körpers sind, bezogen auf das an der Kreisbewegung theilnehmende Axensystem $AOB$. Um $x$, $y$ als Functionen der Zeit auszudrücken, bezeichne man mit $\alpha$ den Centriwinkel $NMO$, so dass $NO = r\alpha = vt$, und $Q$ sei der Schnittpunkt der Tangente $NP$ mit dem Radius $MO$. Dann ist

$$MQ = r \sec \alpha, \quad NQ = r \operatorname{tg} \alpha,$$
$$OQ = r(\sec \alpha - 1), \quad PQ = r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha),$$

ferner, weil der Winkel $BPQ = \alpha$,

$$BP = x \qquad = PQ \cos \alpha = r(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha),$$
$$BQ = OQ - y = PQ \sin \alpha = r(\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha - \alpha \sin \alpha).$$
$$y = r(\sec \alpha - 1 - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \alpha \sin \alpha)$$
$$= r(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1).$$

Also schliesslich

$$x = r(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$
$$y = r(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1)$$
$$\alpha = vt : r = \omega t.$$

Dies sind die Gleichungen der scheinbaren Bewegung (Kreisevolvente); $y$ misst die centrifugale Steighöhe, $x$ das Zurückbleiben in tangentialer Richtung. Beschränkt man sich nun auf eine unbegrenzt kleine Zeit $t$, setzt die Reihen ein

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \cdots, \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \cdots$$

und behält nur die Glieder niedrigster Ordnung, so wird

$$x = r\frac{\alpha^3}{3} = \frac{v^3}{3r^2}t^3, \qquad y = r\frac{\alpha^2}{2} = \frac{v^2}{2r}t^2,$$

so dass für $t = 0$ auch $x:y$ verschwindet, d. h. die Curve berührt den Radius, und man kann $x$ gegen $y$ vernachlässigen, also den Anfang der Bewegung als blosse radiale Erhebung ansehen. Vergleicht man den Werth von $y$ mit der Fallhöhe $h = \frac{g}{2}t^2$, die nach *Galilei's* Fallgesetzen durch die Beschleunigung $g$ in der Zeit $t$ erzeugt wird, so zeigt sich, dass zur Erreichung der Steighöhe $y = \frac{\gamma}{2}t^2$ die centrifugale Beschleunigung $\gamma = v^2 : r$ nothwendig ist. Wir erhalten also, je nachdem wir lineare Geschwindigkeit, Winkelgeschwindigkeit oder Umlaufszeit einführen, die Grundformel

$$(1) \qquad \gamma = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

21) *Zu Lehrsatz I, S. 42.* Die folgenden Sätze beweisen für zwei Körper 1, 2 folgende Proportionen:

I. Wenn $T_1 = T_2$, so ist $\gamma_1 : \gamma_2 = r_1 : r_2$.
II. Wenn $r_1 = r_2$, so ist $\gamma_1 : \gamma_2 = v_1^2 : v_2^2$.
III. Wenn $v_1 = v_2$, so ist $\gamma_1 : \gamma_2 = r_2 : r_1$.
IV. Wenn $\gamma_1 = \gamma_2$, so ist $T_1 : T_2 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r_2}$.

Aus zweien dieser Sätze, am einfachsten aus II, III, kann der allgemeine Fall hergeleitet werden. Nimmt man einen Hülfskörper 3 an, für den $r_3 = r_1$, $v_3 = v_2$, der sich also auf demselben Kreise wie 1 mit derselben Geschwindigkeit wie 2 bewegt, so ist

$$\gamma_1 : \gamma_3 = v_1^2 : v_3^2 = v_1^2 : v_2^2,$$
$$\gamma_3 : \gamma_2 = r_2 : r_3 = r_2 : r_1,$$

also

$$\gamma_1 : \gamma_2 = v_1^2 r_2 : v_2^2 r_1 = \frac{v_1^2}{r_1} : \frac{v_2^2}{r_2},$$

folglich $\gamma$ mit $v^2 : r$ proportional. Dass *Huygens* zunächst nur zur Proportionalität, nicht zur Gleichheit beider Grössen gelangt, liegt daran, dass er in Lehrsatz II (Fig. 8) die kleinen centrifugalen Steighöhen $EC$, $FD$ nicht selbst, sondern nur ihr Verhältniss bestimmt.

22) *Zu Lehrsatz V, S. 46.* Hier wird die Betrachtung von Proportionen (s. vorige Anm.) durch Bestimmung des absoluten Werthes von $\gamma$ ergänzt, allerdings auf einem Umwege. Nach *Galilei's* Fallgesetzen ist $v = \sqrt{2gh}$ die durch Fall von der Höhe $h$ erworbene Endgeschwindigkeit. Durch Fall von der Höhe $\frac{r}{2}$ wird also die Geschwindigkeit $v = \sqrt{gr}$ erlangt, woraus $v^2 : r = g$ folgt; da nun in diesem Falle $\gamma = g$ wird, so ist auch im Allgemeinen $\gamma$ mit $v^2 : r$ nicht nur proportional, sondern gleich. Man kann also sagen, dass die Grundformel (1) in *Huygens'* Lehrsätzen II, III, V enthalten ist.

23) *Zu Lehrsatz VI, S. 48.* Soll $\gamma = g$, die Centrifugalkraft gleich der Schwere, sein, so folgt aus (1)

$$r = gT^2 : 4\pi^2 = H : 2\pi^2,$$

wenn $H$ die in der Umlaufszeit $T$ durchlaufene Fallstrecke $H = \frac{1}{2}gT^2$ ist.

1 rheinländ. Fuss = 12 Zoll oder Unzen = 144 Linien = = 31,38535 cm. Für $T = 1$ sec nimmt *Huygens* $H = 15'7\frac{1}{2}''$ $= 187{,}5'' = 490{,}4$ cm, entsprechend der Beschleunigung $g =$ 980,8 cm : sec²; dann wird der Durchmesser des gesuchten Kreises $2r = H : \pi^2 = 19{,}00'' = 49{,}7$ cm.

24) *Zu Lehrsatz VII, S. 50.* Damit der Körper auf dem horizontalen Parallelkreise mit dem Radius $r = HK$ auf dem Paraboloid rotiren könne, muss die Resultante aus der horizontalen Centrifugalkraft $\gamma$ und der Schwere $g$ in die Richtung der Normale $LH$ fallen, so dass sie durch den Widerstand der Fläche (oder der »schiefen Ebene« $HF$, die die Fläche in $H$ berührt) vernichtet wird.

Da $KL = p$ = Halbparameter der erzeugenden Parabel, so ist

$$g : \gamma = \operatorname{tg} KHL = p : r,$$

und wenn $\omega$ wiederum die Winkelgeschwindigkeit, $T$ die Umlaufszeit bezeichnet,

$$\gamma = \frac{g}{p} r = r\omega^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{p}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{p}{g}}.$$

Die Umlaufszeit ist also für alle Punkte des Paraboloids dieselbe und gleich der gesammten Schwingungsdauer (für Hin- und Rückgang) eines Pendels von der Länge $p$. Aus der Constanz von $\omega$ folgt übrigens sofort, dass das Paraboloid die Form der Oberfläche einer schweren, mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ rotirenden Flüssigkeit ist.

25) *Zu Lehrsatz VIII, S. 52.* Die Lehrsätze VIII—XV handeln vom conischen Pendel. An einem Faden (s. Fig. 19) von der Länge $BA = l$ ist ein Körper $B$ aufgehängt, der den horizontalen Kreis vom Radius $BE = r$ mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\omega$ in der Zeit $T$ durchläuft. $AE = h$ sei die Höhe des Kegelmantels, den der Pendelfaden beschreibt, $EBA = \varphi$ die Neigung des Fadens gegen den Horizont. Man hat

$$r = l \cos \varphi, \qquad h = l \sin \varphi.$$

Die Resultante $f$ aus der horizontal (in der Richtung $EB$) wirkenden Centrifugalkraft $\gamma$ und der vertical nach unten wirkenden Schwere $g$ muss in die Richtung $AB$ des verlängerten Fadens fallen und den Faden spannen; das aus $f$, $\gamma$, $g$ gebildete Dreieck ist also dem aus $l$, $r$, $h$ gebildeten ähnlich, und es wird

$$f : \gamma : g = l : r : h.$$

Demnach ist

$$\gamma = gr : h = r\omega^2,$$

also die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{g : h}$ und die Umlaufszeit $T = 2\pi \sqrt{h : g}$, womit die Sätze VIII und X bewiesen sind. In der Formel $T = 2\pi \sqrt{l \sin \varphi : g}$ steckt der Inhalt der Sätze IX und XI. Die Fadenspannung $f = gl : h$ ist bei gleichen Höhen $h$ der Fadenlänge proportional; Satz XV. Für »minimale Umläufe« ferner, d. h. für sehr kleine Werthe von $r$, kann man $h$ durch $l$ ersetzen und hat $T = 2\pi \sqrt{l : g}$, also $T$ gleich der ganzen Schwingungsdauer des in einer Ebene oscillirenden Pendels von der Länge $l$ oder gleich $\pi$ mal der Fallzeit aus der Höhe $2l$; das ist Lehrsatz XII.

26) *Zu Lehrsatz XIII, S. 56.* Rotirt ein Punkt auf einem Kreise vom Radius $l$ in der Zeit $T = 2\pi \sqrt{l : g}$, also mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{g : l}$, so ist seine Centrifugalkraft $\gamma = l\omega^2 = g$.

27) *Zu Lehrsatz XIV, S. 56.* Die Fallzeit aus der Höhe $l$ ist $\sqrt{2l:g}$; soll diese mit der Umlaufszeit $2\pi\sqrt{h:g}$ des conischen Pendels übereinstimmen, so muss sein

$$2\pi\sqrt{h} = \sqrt{2l}$$
$$h:l = \sin\varphi = 1:2\pi^2 = 0{,}05066, \qquad \varphi = 2°54'14''.$$

28) *Zu Lehrsatz XVI, S. 58.* Das Pendel, das durch einen ganzen Kreisquadranten, d. h. um die verticale Strecke $l$ fällt, erlangt im tiefsten Punkte die Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gl}$ und hat daher dort die Centrifugalkraft $\gamma = v^2 : l = 2g$, also das Doppelte seines Gewichts (immer, wie bisher, die Masse $= 1$ gesetzt); dazu kommt noch die gleichgerichtete Schwere $g$ selbst, so dass $3g$ die gesammte Zugkraft nach unten darstellt. Fällt das Pendel nur von der Höhe $h$ (S. 60), so ist $v = \sqrt{2gh}$ und $\gamma = v^2 : l = 2gh : l$. Uebrigens ist die Begründung dieses und des folgenden Lehrsatzes mit der sonstigen Beweisführung nicht ganz gleichartig, insofern als *Huygens* ein neues Element, die den Kreis osculirende Parabel, in die Betrachtung hineinzieht.

29) *Zu Lehrsatz XVII, S. 60.* Ist $v_0$ die Geschwindigkeit des Pendels im obersten Punkte der Kreisbahn, $v$ die im untersten, so ist nach den Fallgesetzen (Differenz der Geschwindigkeitsquadrate $= 2g$ mal Höhendifferenz)

$$v^2 = v_0^2 + 4gl,$$

und wenn $\gamma_0 = v_0^2 : l$, $\gamma = v^2 : l$ die entsprechenden Centrifugalkräfte bedeuten,

$$\gamma = \gamma_0 + 4g.$$

Die Centrifugalkraft $\gamma_0$ im obersten Punkte muss aber mindestens der Schwere gleich sein, da sonst das Pendel keine volle Kreisbahn beschreiben, sondern zunächst in einer Parabel innerhalb des Kreises fallen würde; die nach oben ziehende Kraft $\gamma_0$ muss die nach unten wirkende Schwere $g$ erreichen oder übertreffen, damit der Faden gespannt bleibe. Also $\gamma_0 \geqq g$, folglich im untersten Punkte $\gamma \geqq 5g$, und die gesammte Zugkraft nach unten $\gamma + g \geqq 6g$. *Huygens* beachtet bei diesen Bedingungen nur das Gleichheitszeichen, also den Grenzfall, in dem eine volle Kreisbahn eben möglich ist; $\gamma_0 = g$, $\gamma = 5g$. Es ist aber klar, dass eine beliebige Vermehrung der Geschwindigkeiten und Centrifugalkräfte zulässig ist, ohne die volle Kreisbewegung zu zerstören;

natürlich kann auch in Fig. 24 der Nagel tiefer als im Punkte $D$ eingeschlagen sein. — Man beachte, dass hier vom Fadenpendel die Rede ist; beim Stangenpendel, wo die Bedingung der Fadenspannung wegfällt, ist für $v_0$ und $\gamma_0$ keine untere Grenze vorgeschrieben, und hier braucht im Falle einer vollen Kreisbahn nur $v_0$ reell, $v^2 \geqq 4gl$, $\gamma \geqq 4g$, $\gamma + g \geqq 5g$ zu sein. Die starre Pendelstange muss also mindestens das 5fache, der biegsame Pendelfaden mindestens das 6fache Gewicht des in voller Kreisbahn schwingenden Körpers tragen können.

Felix Hausdorff.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Nr. 76. **F. E. Neumann**, Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. (1832.) Herausgegeben von A. Wangerin. (52 S.) *M* —.80.

» 79. **H. Helmholtz**, 2 hydrodynamische Abhandlungen. I. Über Wirbelbewegungen. (1858.) — II. Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. (1868.) Herausg. v. A. Wangerin. (80 S.) *M* 1.20.

» 80. —— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (1859.) Herausgegeben von A. Wangerin. (132 S.) *M* 2.—.

» 81. **Michael Faraday**, Experimental-Untersuchungen über Elektricität. I. u. II. Reihe. (1832.) Mit 41 Figuren im Text. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (96 S.) *M* 1.50.

» 86. —— —— III. bis V. Reihe. (1833.) Mit 15 Figuren im Text. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (104 S.) *M* 1.60.

» 87. —— —— VI. bis VIII. Reihe. (1834.) Mit 48 Figuren im Text Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (180 S.) *M* 2.60.

» 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 9 Fig. im Text. (78 S.) *M* 1.20.

» 96. **Sir Isaac Newton's** Optik oder Abhandlung über Spiegelungen, Brechungen, Beugungen und Farben des Lichts. (1704.) Übersetzt und herausgegeben von William Abendroth. I. Buch. Mit dem Bildniss von Sir Isaac Newton u. 46 Fig. im Text. (132 S.) *M* 2.40.

» 97. —— —— II. u. III. Buch. Mit 12 Fig. im Text. (156 S.) *M* 2.40.

» 99. **R. Clausius**, Über die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, welche sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. (1850.) Herausgegeben von Max Planck. Mit 4 Figuren im Text. (55 S.) *M* —.80.

» 100. **G. Kirchhoff**, Abhandlungen über Emission und Absorption: 1. Über die Fraunhofer'schen Linien. (1859.) — 2. Über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme. (1859.) — 3. Über das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Licht und Wärme. (1860—1862.) Herausgegeben von Max Planck. Mit dem Bildniss von G. Kirchhoff u. 5 Textfig. (41 S.) *M* 1.—.

» 101. —— —— Abhandlungen über mechanische Wärmetheorie: 1. Über einen Satz der mechanischen Wärmetheorie u. einige Anwendungen desselben. (1858.) — 2. Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. (1858.) — 3. Über die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure. Herausgegeben von Max Planck (48 S.) *M* —.75.

» 102. **James Clerk Maxwell**, Über physikalische Kraftlinien. Herausgegeben von L. Boltzmann. Mit 12 Textfig. (147 S.) *M* 2.40.

» 106. **D'Alembert**, Abhandlung über Dynamik, in welcher die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung der Körper auf die kleinstmögliche Zahl zurückgeführt und in neuer Weise abgeleitet werden, und in der ein allgemeines Princip zur Auffindung der Bewegung mehrerer Körper, die in beliebiger Weise aufeinander wirken, gegeben wird (1743). Übersetzt und herausgegeben von Arthur Korn. Mit 4 Tafeln. (210 S.) *M* 3.60.

» 109. **Riccardo Felici**, Über die mathematische Theorie der electrodynamischen Induction. Übersetzt v. B. Dessau. Herausg. von E. Wiedemann. (121 S.) *M* 1.80.

» 114. **Alessandro Volta**, Briefe über thierische Elektricität. (1792.) Herausg. v. A. J. von Oettingen. (162 S.) *M* 2.50.

Nr. 115. **Horace Bénédicte de Saussure,** Versuch über die Hygrometrie. I. Heft. (1783.) Mit einer Tafel und Vignette. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (168 S.) ℳ 2.60.

» 118. **Alessandro Volta,** Untersuchungen über den Galvanismus. (1796 bis 1800.) Herausg. von A. J. von Oettingen. (99 S.) ℳ 1.60.

» 119. **Horace Bénédicte de Saussure,** Versuch über die Hygrometrie. II. Heft. (1783.) Mit zwei Figuren. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (170 S.) ℳ 2.40.

» 125. **John Mayow,** Untersuchungen über den Salpeter und den salpetrigen Luftgeist, das Brennen und das Athmen. Herausgegeben von F. G. Donnan. (56 S.) ℳ 1.—.

» 126. **Michael Faraday,** Experimental-Untersuchungen über Elektricität. (Aus den Philosoph. Transact. f. 1835.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen IX. b. XI. Reihe. Mit 15 Figuren i. Text. (104 S.) ℳ 1.80.

» 128. —— —— (Aus den v. Oettin (133 S.) ℳ

» 131. —— —— (Aus den v. Oetti (48 S.) ℳ

» 132. **Thomas** flüssigen der Mater of Matter, 159, 186 Vol. 16 Oetting im Text

» 133. **Lambert** meten. servation aus den Deutsch sching

» 134. **Michael** (Aus der v. Oett (103 S.)

» 135. **C. F. Ga** Flüssigk abgedru Gotting H. We burg).

» 137. **August** Vorgäng Text. (7

» 138. **Christia** wegung Herausg Text. (